Final

—③—

Ch① 수열의 극한과 급수

TH①. 등차수열 (공차 추론)

계수비를 찾는 문항! **2025년 6월 평가원모의고사 30번**

2025년 Trend

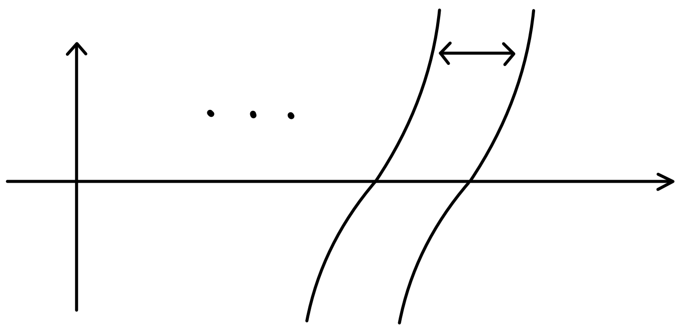
1. 함수 $y=\frac{\sqrt{x}}{10}$의 그래프와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n{}^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)}$$

의 값을 구하시오.

$\tan a_n = \frac{\sqrt{a_n}}{10}$

TTP



교점간 간격은 주기!

↓

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}-a_n=\pi$

↓

a_n을 공차가 π인 등차수열로 인식

Sol 가볍게 계수비만 보겠다!

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{x\to\infty}\underbrace{a_n{}^3}_{\pi^3 n^3}\times\frac{\frac{1}{10}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})\pi}{1+\frac{\sqrt{a_n a_{n+1}}}{100}+\pi n}$$

2025년 9월 평가원모의고사 29번

2025년 Trend

2. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 하자. 모든 자연수 m에 대하여

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

일 때, $a_1+a_{10}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots-\left(\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m+1}$$

2024년 10월 교육청모의고사

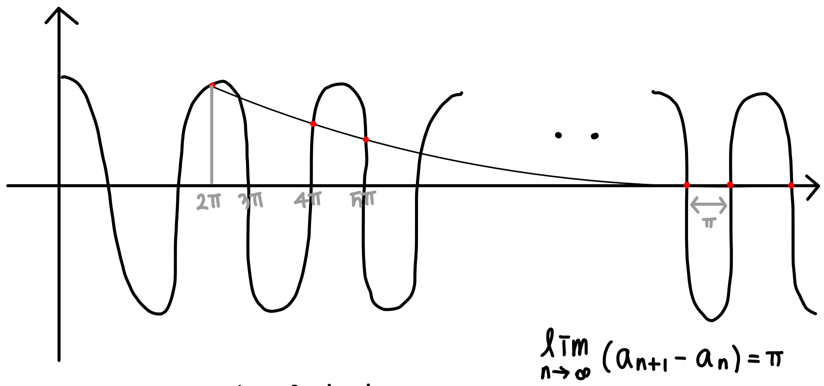
2025년 Trend

3. 함수 $y=\frac{2\pi}{x}$ 의 그래프와 함수 $y=\cos x$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, m번째 수를 a_m이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{n\times\cos^2(a_{n+k})\right\}$ 의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$



$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\pi$

어차피 Sandwich

$n\pi < a_n < (n+1)\pi$, $a_n = n\pi$ 가정

$\frac{2\pi}{a_n}=\cos a_n$, $\frac{2\pi}{a_{n+k}}=\cos a_{n+k}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} n\times\left(\frac{2\pi}{a_{n+k}}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} n\times\left(\frac{2\pi}{(n+k)\pi}\right)^2$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{1+\frac{k}{n}}\right)^2$

TH②. 등비수열 (공비 추론)

2024년 5월 교육청모의고사 30번

4. 수열 $\{a_n\}$은 공비가 0이 아닌 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

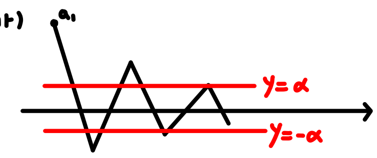
$$b_n=\begin{cases} a_n & (|a_n|<\alpha) \\ -\frac{5}{a_n} & (|a_n|\geq \alpha) \end{cases}$$

(α는 양의 상수)라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 p가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$ → $a_1>0$ $(-1<r<0)$
>
> (나) $\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m은
>
> p이고, $\sum_{n=1}^{p}b_n=51$, $\sum_{n=p+1}^{\infty}b_n=\frac{1}{64}$이다.

$32\times(a_3+p)$의 값을 구하시오.

(가)



(나) 바깥쪽

$\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{\boxed{b_n}}$ 최소 $m=p$

$\sum_{1}^{p}a_n=51$ $-\frac{5}{a_n}$ 바깥

$=\frac{-\frac{5}{a_1}\left(\left(\frac{1}{r}\right)^p-1\right)}{\frac{1}{r}-1}=51$ ★1

$\sum_{p+1}^{\infty}b_n=\frac{1}{4}=\boxed{\frac{a_{p+1}}{1-r}=\frac{1}{4}}$ ★2

안

(가) $\frac{a_1}{1-r}=4$ ★3

1st $\frac{★2}{★3}$

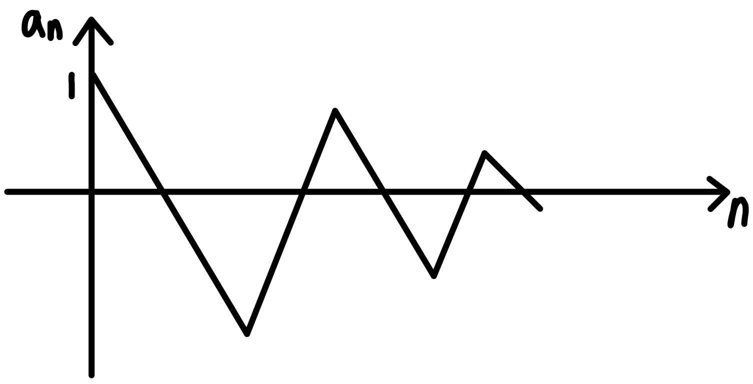
2nd ★1에 대입

5. 첫째항이 1이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(20a_{2n}+21\left|a_{3n-1}\right|\right)=0$$

이다. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\left|a_n\right|+b_n}{a_n}$이 수렴할 때, $b_1\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값을 구하시오.

①



$\sum 20a_{2n}+21|a_{3n-1}|=0$

$\frac{20\cancel{r}}{1-r^2}+\frac{-21|a_2|\cancel{r^2}}{1+r^3}=0$

$\frac{20}{1-r}-\frac{21}{1-r+r^2}=0$

$\left(r=-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{4}\cdots\right)$

②

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|a_n|+b}{a_n}$ $3\times(-r)^{n-1}$

$n=1$ $n=2$ $n=3$

3 -3 3

-3 3 -3

문제유형은 쉽지만, 계산이 어려움! **2024학년도 수능**

6. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right),$$

$$3\times\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{2n}\right|=7\times\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{3n}\right|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}=S$일 때, $120S$의 값을 구하시오.[4점]

①

$3\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=7\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|$

$0<r<1$ → 모순 $-1<r<0$

$3\times\frac{\cancel{|a_2|}}{1-r^2}=7\times\frac{\cancel{|a_3|}\ \cancel{|r|}\ -r}{1+r^3}$ $\frac{|a_3|}{|a_2|}=\left|\frac{a_3}{a_2}\right|$ r

$\frac{3}{1-r}=\frac{-7r}{1-r+r^2}$ 인수분해가능 But → 대입

$r=-\frac{1}{2}$

$r=-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},-\frac{2}{3},-\frac{3}{4}\cdots$

②

$\sum a_nb_n=\sum a_n\sum b_n$

공비 $-\frac{1}{2}\times R$

$\frac{a_1b_1}{1-\left(-\frac{R}{2}\right)}=\frac{a_1}{1+\frac{1}{2}}\times\frac{b_1}{1-R}$

$1+\frac{R}{2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}R,\ R=\frac{1}{4}$

③

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}$

공비 $\frac{1}{4}$ 공비 $\frac{1}{1}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\cancel{R}\ \frac{1}{16}}{1-\frac{1}{16}}$

Easy

2024학년도 9월 평가원모의고사

7. 두 실수 a, b $(a>1,\ b>1)$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

2024학년도 6월 평가원모의고사

8. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

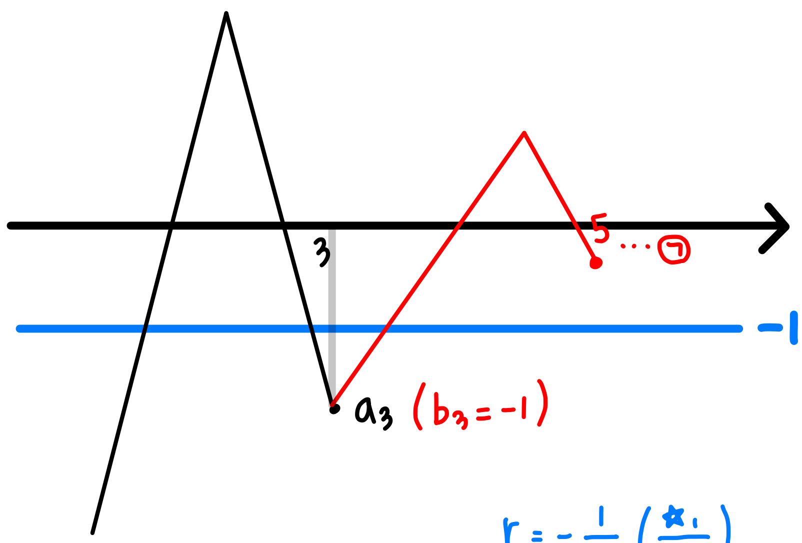
$$b_n=\begin{cases}-1 & (a_n\le -1)\\ a_n & (a_n>-1)\end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.
(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3=-1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

Graph $-1<r<0$



$r=-\frac{1}{2}$ $\left(\frac{★_1}{★_2}\right)$

(가) $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}=-3$

$=\underset{-1}{b_1}+\underset{-1}{b_2}+\underset{\cancel{-1}\ \downarrow\ a_5\cdots㉠}{b_3}+\cdots$

$=\frac{a_5}{1-r^2}=-1$ ★1

(나) $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$

$=\frac{a_2}{1-r^2}=r$ ★2

9. $a_1 = b_1 \neq 0$인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{n+1} = ra_n$, $b_{n+1} = (r^2-1)b_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$
>
> (나) 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 모두 수렴하고
>
> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n : \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 14 : 3$이다.

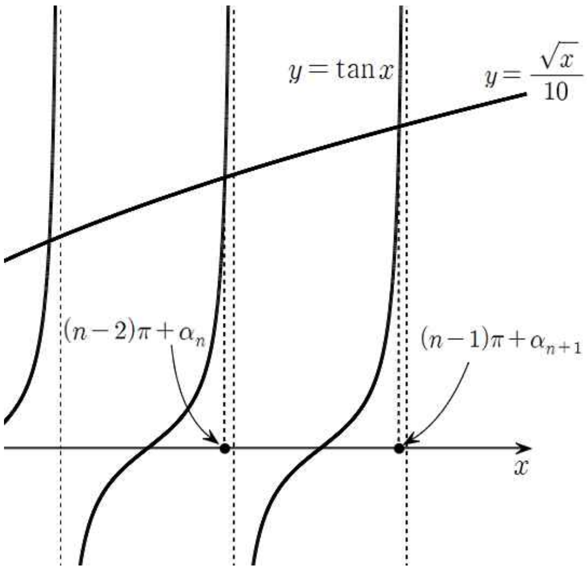
급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$이 실수 p에 수렴할 때, $44p$의 값을 구하시오. (단, r은 상수이다.)

1. [정답] 25

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 미적분 30 [4.00점]

[해설]

함수 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{10}$와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 점의 x좌표가 a_n이므로 아래 그림에서처럼



$\dfrac{\sqrt{x}}{10}=\tan x$에서 $(n-2)\pi \le x<(n-2)\pi+\dfrac{\pi}{2}$의 근을 $x=(n-2)\pi+\alpha_n$이라 하자. $\left(\text{단, } 0\le \alpha_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$a_1=\alpha_1=0,\ a_2=\alpha_2,\ a_3=\pi+\alpha_3,\ a_4=2\pi+\alpha_4,\ \cdots$$

$$a_n=(n-2)\pi+\alpha_n\ \left(\text{단, } 0\le \alpha_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$$

이므로 $a_{n+1}=(n-1)\pi+\alpha_{n+1}$

$\alpha_n<\alpha_{n+1}$이고, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)=0$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\pi+\alpha_{n+1}}{(n-2)\pi+\alpha_n}=1$$

이므로

$$\tan(a_{n+1}-a_n)=\frac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{1+a_{n+1}a_n}$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{10}}{1+\dfrac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{100}}$$

$$=\frac{10\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)}{100+\sqrt{a_{n+1}a_n}}$$

$$=\frac{10(a_{n+1}-a_n)}{\left(100+\sqrt{a_{n+1}a_n}\right)\left(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}\right)}$$

$$=\frac{10(\pi+\alpha_{n+1}-\alpha_n)}{\left(100+\sqrt{a_{n+1}a_n}\right)\left(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}\right)}$$

$$a_n\sqrt{a_n}\times\tan(a_{n+1}-a_n)$$

$$=\frac{10(\pi+\alpha_{n+1}-\alpha_n)}{\left(\dfrac{100}{a_n}+\sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}\right)\left(\sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}+1\right)}$$

따라서

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10(\pi+\alpha_{n+1}-\alpha_n)}{\left(\dfrac{100}{a_n}+\sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}\right)\left(\sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}+1\right)}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\times\left(\frac{10\pi}{(0+1)(1+1)}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\times 25\pi^2$$

$$=25$$

2. [정답] 57

[해설]

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+m+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=m+2}^{n+m+1}\frac{1}{k}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{n+m+1}\frac{1}{k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}$$

$m=1$일 때 $a_1=S_1=\sum\limits_{k=1}^{2}\dfrac{1}{k}=\dfrac{3}{2}$

$$a_{10}=S_{10}-S_9=\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k}=\frac{1}{11}$$

$a_1+a_{10}=\dfrac{35}{22}$이므로 $p=22,\ q=35$

$$\therefore\ p+q=57$$

3. [정답] ②

[해설]

a_m은 두 곡선 $y=\dfrac{2\pi}{x}$와 $y=\cos x$의 교점의 x좌표

이므로 $\dfrac{2\pi}{a_m}=\cos(a_m)$

$$n\times\cos^2(a_{n+k})=n\times\frac{4\pi^2}{(a_{n+k})^2}$$

$a_1 = 2\pi,\ m > 1$에서 $m\pi < a_m < (m+1)\pi$이므로

$\dfrac{4n}{(n+k+1)^2} < n \times \cos^2(a_{n+k}) < \dfrac{4n}{(n+k)^2}$ 이다.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{4n}{(n+k)^2} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} \times \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{4}{(1+x)^2}\,dx = \left[-\frac{4}{1+x}\right]_0^1 = 2$$

이고

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{4n}{(n+k+1)^2} - \frac{4n}{(n+k)^2} \right\}$$

$= \lim_{n \to \infty} \left\{ \dfrac{4n}{(2n+1)^2} - \dfrac{4n}{(n+1)^2} \right\} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{4n}{(n+k+1)^2} = 2$$

수열의 극한의 대소 관계의 성질에 의하여

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \times \cos^2(a_{n+k}) \right\} = 2$$

4. **정답** 138

$|\alpha_k| > \alpha,\ |a_{k+1}| < \alpha$라 할 때,

$b_n : -\dfrac{5}{a_1},\ -\dfrac{5}{a_2},\ -\dfrac{5}{a_3},\ \cdots,\ -\dfrac{5}{a_k},\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \cdots$

$\dfrac{a_n}{b_n} : -\dfrac{(a_1)^2}{5},\ -\dfrac{(a_2)^2}{5},\ -\dfrac{(a_3)^2}{5},\ \cdots,\ -\dfrac{(a_k)^2}{5},\ 1,\ 1,\ ,1,\ \cdots$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 할 때, $-\dfrac{(a_n)^2}{5}$가 더해질수록 값이 작아지므로 $k = p$

등비수열 a_n의 첫 항이 a, 공비가 r일 때, $a_n = ar^{n-1}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$일 때, $\dfrac{a}{1-r} = 4,\ a = 4-4r$

$\displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \frac{ar^p}{1-r} = \frac{1}{64},\ ar^p = \frac{1}{64}(1-r) = 4(1-r)r^p$

$r^p = \dfrac{1}{256}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{p} b_n = -\sum_{n=1}^{p} \frac{5}{a}\left(\frac{1}{r}\right) = 51,$

$\dfrac{\frac{5}{a}\left(1-\frac{1}{r^p}\right)}{1-\frac{1}{r}} = -51,\ \dfrac{5}{a} \times (1-256) = -51\left(\dfrac{r-1}{r}\right),\ 5 \times 5r = a(r-1)$

$a = 4-4r$이므로 $4(1-r)(r-1) = 25r,\ 4r^2+17r+4 = 0$

$(4r+1)(r+4) = 0$에서 $r = -\dfrac{1}{4},\ a = 4-4r = 5,\ a_n = 5\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

$a_3 = \dfrac{5}{16}\ r^p = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^p = \dfrac{1}{256},\ p = 4$

$\therefore\ 32 \times (a_3 + p) = 32 \times \left(\dfrac{5}{16} + 4\right) = 10 + 128 = 138$

5. [정답] 12

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_1 = 1$이므로 $a_n = r^{n-1}$ (단, n은 자연수)

급수 $\displaystyle\sum_{n=1} a_n$이 수렴하므로

$-1 < r < 0$ 또는 $0 < r < 1$

$\displaystyle\sum_{n=1} (20a_{2n} + 21|a_{3n-1}|) = 0$에서

$0 < r < 1$이면

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (20a_{2n} + 21|a_{3n-1}|) > 0$이므로

주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $-1 < r < 0$

$\{a_{2n}\}$은 공비가 r^2인 등비수열이고

$\{|a_{3n-1}|\}$은 공비가 $-r^3$인 등비수열이다.

$0 < r^2 < 1,\ -1 < -r^3 < 0$이므로

두 급수 $\displaystyle\sum_{n=1} a_{2n},\ \sum_{n=1} |a_{3n-1}|$은 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (20a_{2n} + 21|a_{3n-1}|)$$

$= \dfrac{20r}{1-r^2} + \dfrac{21|a_2|}{1-(-r^3)} = \dfrac{20r}{1-r^2} + \dfrac{21 \times (-r)}{1+r^3} = 0$

$20(1-r+r^2) - 21(1-r) = 0$

$20r^2 + r - 1 = 0$

$(5r-1)(4r+1) = 0$

$-1 < r < 0$이므로 $r = -\dfrac{1}{4}$

$a_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$이 수렴하므로

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n} = 0$

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 s라 하면

$\dfrac{b_n}{a_n} = b_1 \times (-4s)^{n-1}$이므로

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$$

$= \displaystyle\lim_{n \to \infty} \left\{ 3 \times (-1)^{n-1} + b_1 \times (-4s)^{n-1} \right\}$

$= \displaystyle\lim_{n \to \infty} \left[(-1)^{n-1} \left\{ 3 + b_1 \times (4s)^{n-1} \right\} \right]$

(ⅰ) $-1 < 4s < 1$인 경우

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} (4s)^{n-1} = 0$이므로

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left\{ 3 + b_1 \times (4s)^{n-1} \right\} = 3$

그러므로 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$이 발산한다.

(ⅱ) $4s < -1$ 또는 $4s > 1$인 경우

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left\{ 3 + b_1 \times (4s)^{n-1} \right\}$은 발산하므로

$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 발산한다.

(iii) $4s=-1$인 경우

$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$

$=\lim_{n \to \infty} \{3\times(-1)^{n-1}+b_1\}$

$\lim_{n \to \infty} \{3\times(-1)^{n-1}\}$은 발산하므로

$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 발산한다.

$\lim_{n \to \infty} \{3\times(-1)^{n-1}\}$은 발산하므로

$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 발산한다.

(iv) $4s=1$인 경우

$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$

$=\lim_{n \to \infty} \{(-1)^{n-1}\times(3+b_1)\}$

$b_1=-3$일 때,

모든 자연수 n에 대하여

$\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$이므로

$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$

(i)~ (iv)에 의하여

$b_1=-3$, $s=\frac{1}{4}$

$b_n=(-3)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{-3}{1-\frac{1}{4}}=-4$

따라서 $b_1 \times \sum_{n=1} b_n=12$

6. 162

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공비를 r_1, 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b_1, 공비를 r_2라 하면 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하므로

$-1<r_1<1$, $-1<r_2<1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a_1}{1-r_1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{b_1}{1-r_2}$

이때 수열 $\{a_n b_n\}$은 첫째항이 $a_1 b_1$, 공비가 $r_1 r_2$인 등비수열이고 $-1<r_1 r_2<1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n=\frac{a_1 b_1}{1-r_1 r_2}$

즉 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$에서

$\frac{a_1 b_1}{1-r_1 r_2}=\frac{a_1}{1-r_1}\times\frac{b_1}{1-r_2}$

$\therefore \ r_1+r_2=2r_1 r_2$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 수열 $\{|a_{2n}|\}$은 첫째항이 $|a_1 r_1|$, 공비가 r_1^2인 등비수열이고, 수열 $\{|a_{3n}|\}$은 첫째항이 $|a_1 r_1^2|$, 공비가 $|r_1^3|$인 등비수열이며 $0\le r_1^2<1$, $0\le |r_1^3|<1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}|=\frac{|a_1 r_1|}{1-r_1^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|=\frac{|a_1 r_1^2|}{1-|r_1^3|}$

따라서 $3\times\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}|=7\times\sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$에서

$\frac{3|a_1 r_1|}{1-r_1^2}=\frac{7|a_1 r_1^2|}{1-|r_1^3|}$

(i) $r_1>0$일 때

$\frac{3}{1-r_1^2}=\frac{7r_1}{1-r_1^3}$에서

$3-3r_1^3=7r_1-7r_1^3$,

$(2r_1+3)(2r_1-1)(r_1-1)=0$

$\therefore \ r_1=\frac{1}{2}$

즉 ㉠에서 $\frac{1}{2}+r_2=2\times\frac{1}{2}\times r_2$이므로 이를 만족시키는 r_2는 존재하지 않는다.

(ii) $r_1<0$일 때

$\frac{3}{1-r_1^2}=\frac{-7r_1}{1+r_1^3}$에서

$3+3r_1^3=-7r_1+7r_1^3$,

$(2r_1-3)(2r_1+1)(r_1+1)=0$

$\therefore \ r_1=-\frac{1}{2}$

즉 ㉠에서 $\left(-\frac{1}{2}\right)+r_2=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)r_2$이므로 $r_2=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_1\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}^{n-1}+b_1\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^3\right\}^n}{b_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}\right\}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{16}}$

$=\frac{4}{3}+\frac{1}{60}$

$=\frac{27}{20}$

따라서 $S=\frac{27}{20}$이므로

$120S=120\times\frac{27}{20}=162$

7. 18

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a$ 에서 $\quad a>3$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$ 에서

(ⅰ) $a>b$ 일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+b\left(\frac{b}{a}\right)^n}{a+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\frac{1}{a}$$

$\frac{1}{a}\neq\frac{9}{a}$ 이므로 조건을 만족하지 않는다.

(ⅱ) $a=b$ 일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=1$$

$1=\frac{9}{a}$ 에서 $\quad a=9,\ b=9$

(ⅲ) $a<b$ 일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n+b}{a\left(\frac{b}{a}\right)^n+1}=b$$

$b=\frac{9}{a}$ 에서 $ab=9$ 이고 $a>3$ 이므로 $a<b$ 는 가정에 모순이다.

이상에서 $a=9,\ b=9$ 이므로

$$a+b=9+9=18$$

8. 24

[출제의도] 조건을 만족시키는 급수의 합을 구할 수 있는가

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 $a_n=a_1r^{n-1}$

이라 하자. 이때 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $a_1\neq 0$이다.

(ⅰ) $r>1$인 경우

a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅱ) $r=1$인 경우

a_n의 값이 일정한 값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅲ) $r=-1$인 경우

a_n의 값이 $a_1,\ -a_1,\ a_1,\ -a_1,\ a_1,\ \cdots$이 반복되므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅳ) $r<-1$인 경우

a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅴ) $r=0$인 경우

a_n의 값이 첫째항을 제외하고 모두 0이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 $-1<r<0$ 또는 $0<r<1$이다.

그런데 $b_3=-1$이므로 $a_3\leq-1$이다.

즉, $a_1r^2\leq-1$이다.

그런데 $0<r^2<1$이므로

$a_1\leq-1$

따라서 $b_1=-1$이다.

또한 $a_1\leq-1$이므로 $0<r<1$이면 a_n의 모든 항은 음수이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다. 따라서 $-1<r<0$이다.

① $a_2=a_1r\leq-1$일 때

$r\geq-\frac{1}{a_1}>0$이므로 모순이다.

따라서 $a_2=a_1r>-1$이므로

$b_2=a_2=a_1r$

② $b_3=-1$이므로 $a_3=a_1r^2\leq-1$

③ $a_4=a_1r^3\leq-1$일 때

$a_4=a_1r^3=a_1r^2\times r\geq-r>0$ 이므로 모순이다.

즉 $a_4>-1$이므로

$b_4=a_4=a_1r^3$

④ $a_5=a_1r^4\leq-1$일 때 $b_5=-1$ 인데

$b_1+b_3+b_5=-3$

이므로 조건 (가)에 의하여 모순이다.

$b_5=a_5=a_1r^4$

⑤ $a_6=a_4r^2$이고 $a_4>-1$이므로

$a_6>-r^2>-1$

따라서

$b_6=a_6=a_1r^5$

같은 방법으로 생각하면

$b_7=a_7,\ b_8=a_8,\ b_9=a_9,\ \cdots$이므로

$$b_n=\begin{cases}-1 & (n=1,\ n=3)\\ a_1r^{n-1} & (n=2,\ n\geq 4)\end{cases}$$

이다.

조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}=-1+(-1)+a_1r^4+a_1r^6+a_1r^8+\cdots$$

$$=-2+\frac{a_1r^4}{1-r^2}=-3$$

$$\frac{a_1r^4}{1-r^2}=-1$$

$a_1r^4=r^2-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=a_1r+a_1r^3+a_1r^5+\cdots=\frac{a_1r}{1-r^2}=8$$

$a_1r=8-8r^2=8(1-r^2)\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a_1r=-8a_1r^4$ 이므로

$r^3=-\frac{1}{8}$

즉 $r=-\frac{1}{2}$이므로 ㉡에 대입하면

$-\frac{1}{2}a_1=6,\ a_1=-12$

따라서 $a_n=-12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|-12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}12\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{12}{1-\frac{1}{2}}$$

$=24$

9. 정답 24

조건 (가)에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 r^2-1인 등비수열이다.

조건 (나)에서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴하므로

$-1<r<1$ …… ㉠

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴하므로

$-1<r^2-1<1$에서 $0<r^2<2$이고

$-\sqrt{2}<r<0$ 또는 $0<r<\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 r의 값의 범위는

$-1<r<0$ 또는 $0<r<1$

두 등비급수의 합을 구하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-(r^2-1)} = \frac{b_1}{2-r^2}$$

조건 (나)에서

$$\frac{a_1}{1-r} : \frac{b_1}{2-r^2} = 14 : 3$$

$\frac{3a_1}{1-r} = \frac{14b_1}{2-r^2}$에서 $a_1 = b_1 \neq 0$이므로 양변을 a_1로 나누면

$$\frac{3}{1-r} = \frac{14}{2-r^2}$$

$3(2-r^2) = 14(1-r)$

$3r^2-14r+8=0$

$(3r-2)(r-4)=0$

이때 $-1<r<0$ 또는 $0<r<1$이므로 $r=\frac{2}{3}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 $-\frac{5}{9}$인 등비수열이다.

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항을 각각 구하면

$a_n = a_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $b_n = b_1 \times \left(-\frac{5}{9}\right)^{n-1}$이므로

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{b_1 \times \left(-\frac{5}{9}\right)^{n-1}}{a_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} = \left(-\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\left(-\frac{5}{6}\right)} = \frac{6}{11}$이므로

$p=\frac{6}{11}$이고

$44p = 44 \times \frac{6}{11} = 24$

TH①. 함수의 극한

2025학년도 6월 평가원모의고사

1. 양수 t에 대하여 곡선

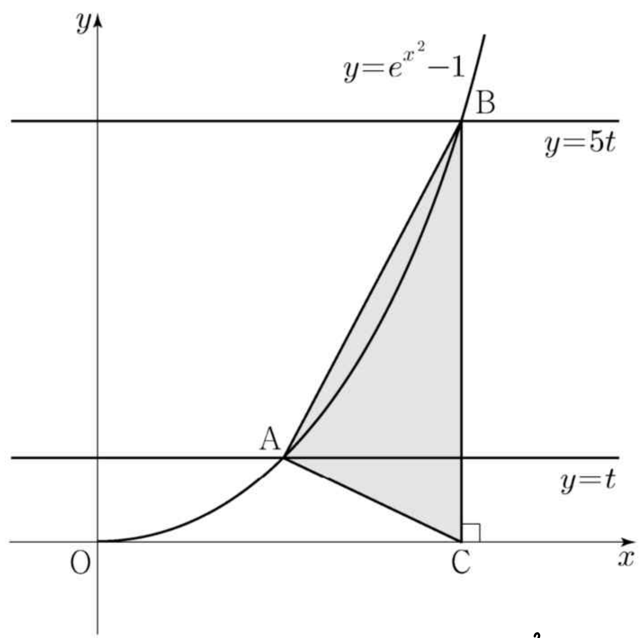
$$y=e^{x^2}-1\ (x\geq 0)$$

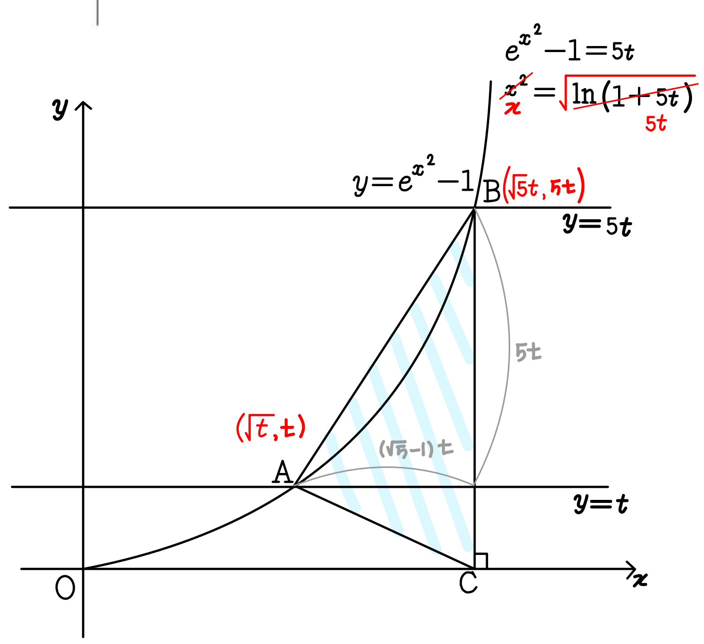
이 두 직선 $y=t$, $y=5t$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$의 값은?

① $\frac{5}{4}(\sqrt{5}-1)$ ② $\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$

③ $5(\sqrt{5}-1)$ ④ $\frac{5}{4}(\sqrt{5}+1)$

⑤ $\frac{5}{2}(\sqrt{5}+1)$

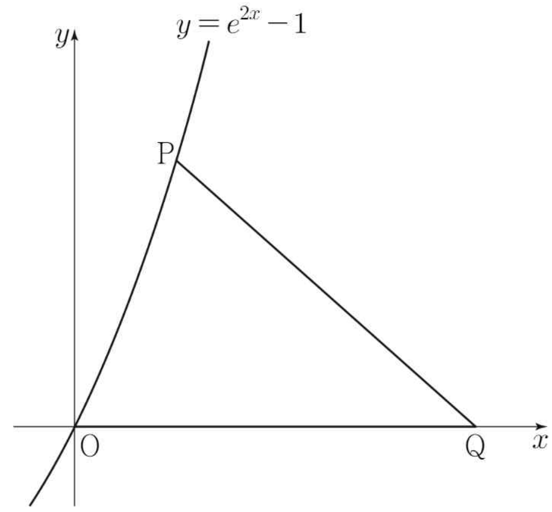




$S(t)=\frac{1}{2}\times(\sqrt{5}-1)t\times 5t$

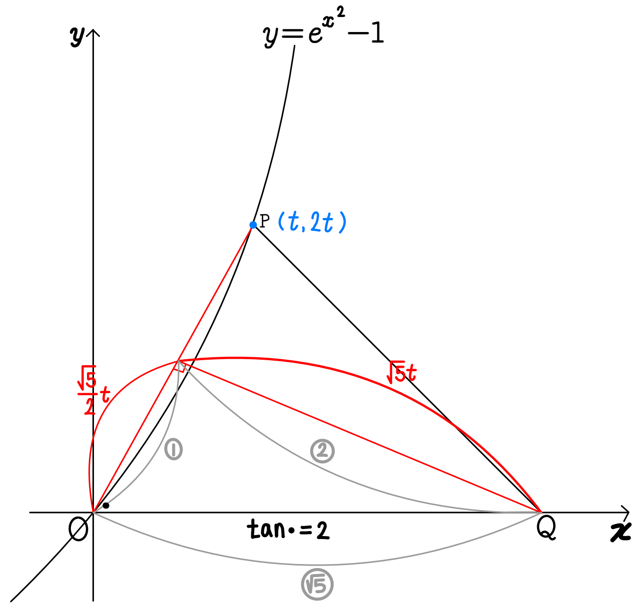
2024년 7월 교육청모의고사

2. 곡선 $y=e^{2x}-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ e^{2t}-1)\ (t>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 x축 위의 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}$의 값은?(단, O는 원점이다.)



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3



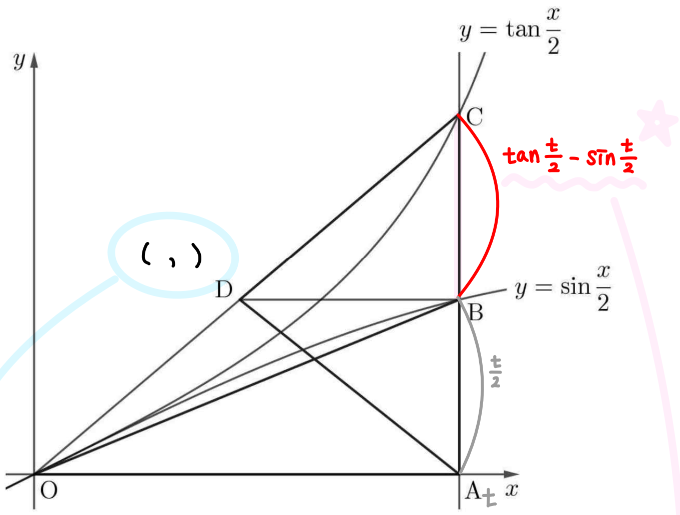
$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{2}t=f(t)$

2025학년도 사관학교

3. $0 < t < \pi$인 실수 t에 대하여 점 $\mathrm{A}(t,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선 $y = \sin\frac{x}{2}$, $y = \tan\frac{x}{2}$와 만나는 점을 각각 B, C라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 선분 OC와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $f(t)$, 삼각형 ACD의 넓이를 $g(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{g(t)}{\{f(t)\}^2}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

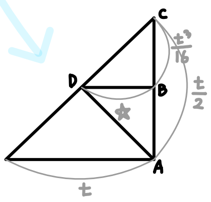
① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$



①

$f(t) = \frac{1}{2} \times t \times \frac{t}{2}$



$\frac{t^3}{16} : \frac{t}{2} = ★ : t$

$★ = \frac{t^3}{8}$

$g(t) = \frac{1}{2} \times \frac{t^3}{8} \times \frac{t}{2}$

② $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{g(t)}{f(t)^2} = \frac{1}{2}$

$= \frac{\cancel{\sin\frac{t}{2}}}{\frac{t}{2}} \left(\frac{1-\cos\frac{t}{2}}{\cancel{\cos\frac{t}{2}}} \right) \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^3}{16}$

$\frac{t}{2} \qquad 1$

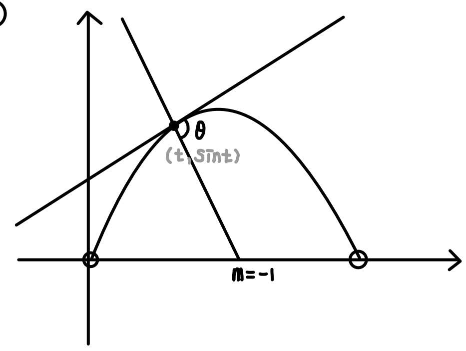
2024학년도 6월 평가원모의고사

4. 실수 $t\ (0 < t < \pi)$에 대하여 곡선 $y = \sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim\limits_{t \to \pi-} \frac{\tan\theta}{(\pi - t)^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

①



$\tan\theta = \frac{\cos t - (-1)}{1 + \cos t \times -1}$

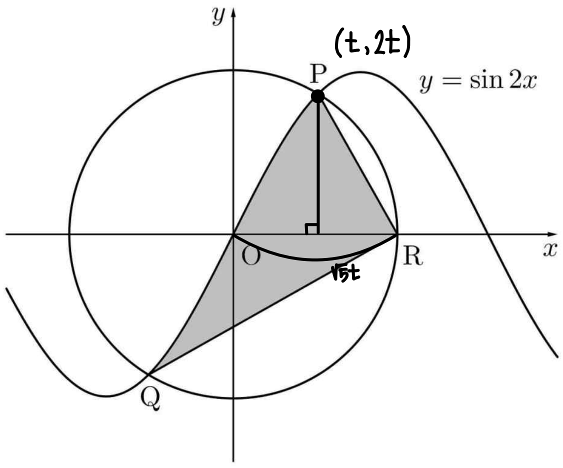
$= \frac{\cos t + 1}{1 - \cos t}$

② $\lim\limits_{t \to \pi-} \frac{\frac{1+\cos t}{2}}{(\pi - t)^2}$

$\pi - t = x$

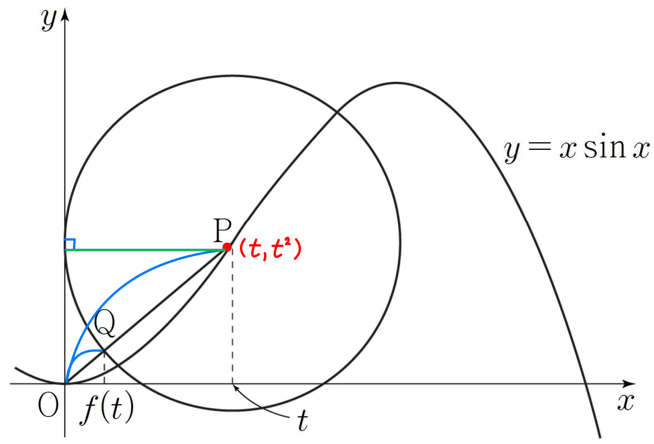
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2} \cancel{\frac{1-\cos x}{x^2}} \frac{1}{2}$

5. $0<t<\dfrac{\pi}{6}$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\sin 2x$ 위의 점 $(t,\ \sin 2t)$를 P라 하자. 원점 O를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원이 곡선 $y=\sin 2x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하고, 이 원이 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 R라 하자. 곡선 $y=\sin 2x$와 두 선분 PR, QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^2}=k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



$S(t) = \frac{1}{2} \times \sqrt{5}t \times 2t \times 2$

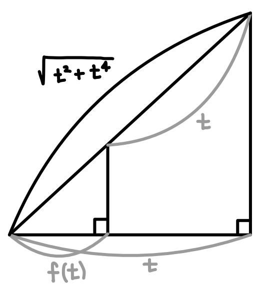
6. 그림과 같이 곡선 $y=x\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t\sin t)$ $(0<t<\pi)$를 중심으로 하고 y축에 접하는 원이 선분 OP와 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t^3}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]



① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$

④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

$\sqrt{t^2+t^4}-t : \underline{\sqrt{t^2+t^4}} = \underline{f(t)} : t$

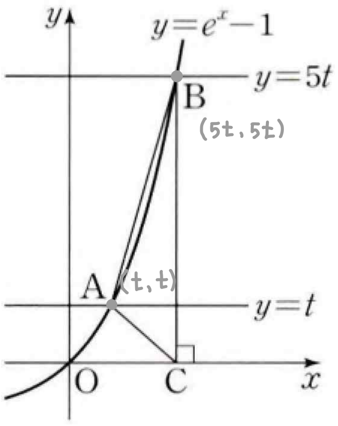


$f(t) : t = t\sqrt{t^2+1} - t : t\sqrt{t^2+1}$

$t^2(\sqrt{t^2+1} - t) = f(t) \times t\sqrt{t^2+1}$

$\dfrac{f(t)}{t^3} = \dfrac{\sqrt{t^2+1} - 1}{t\sqrt{t^2+1}} \times \dfrac{1}{t}$

7. 그림과 같이 양수 t에 대하여 곡선 $y=e^x-1$이 두 직선 $y=t$, $y=5t$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 0+} \frac{S(t)}{t^2}$의 값을 구하시오.



암기!

8. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $0 \le f(x) < \frac{\pi^2}{4}$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln\{1+f(x)\}}{x-1} = 6$
(나) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos\sqrt{f(x)}}{e^x-1} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(\sin x)f(\cos x)}{x^3}$ 의 값은? [4점]

① -16 ② -12 ③ -9
④ -6 ⑤ -3

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 6$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}f(x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(\cancel{\sin x})^{x}}{\cancel{x}} \times \frac{f(\cos x)}{x^2}$ 1 ··· (가) 필요

2

$\frac{f(\cos x)}{\cos x - 1} \times \frac{\cos x - 1}{x^2}$ $-\frac{1}{2}x^2$

6 ··· (가)

TH②. 미분

2024년 7월 교육청모의고사 28점

9. 두 상수 $a\ (a>0)$, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$f(x)=a\sin x-\cos x$, $g(x)=e^{2x-b}-1$이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\tan b$의 값은?

> (가) $f(k)=g(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에 존재한다.
>
> (나) 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 방정식 $\{f(x)g(x)\}'=2f(x)$의 모든 해의 합은 $\frac{\pi}{4}$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$

④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

① (가)

$f(k)=0$, $\tan k=\frac{1}{a}$, $e^{2k-b}=1$, $k=\frac{b}{2}$

② $f'(x)g(x)+\underline{f(x)g'(x)-2f(x)}=0$

$f(x)(\cancel{g'(x)}-2)$ $\quad 2e^{2x-b}$

$\underline{g(x)}(f'(x)+2f(x))=0$

$=0$

$x=k$

$a\cos x+\sin x+2a\sin x-2\cos x=0$

$a-2+(1+2a)\tan x=0$

$\tan x=\frac{2-a}{1+2a}=\frac{\cancel{1-\frac{1}{a}}}{\cancel{1+\frac{1}{a}}}$ $\quad \frac{a-1}{a+1}$

$\frac{\pi}{4}-k$

해의 합 : $\frac{\pi}{4}$

$\tan b=\tan 2k=\frac{2a}{1-a^2}=3$

$\underline{f(k)}=\underline{g(k)}=0 \rightarrow a\sin k-\cos k=0$

$k=\frac{b}{2}$ $\quad \tan k=\frac{1}{a}$

$f'g+\underline{fg'}=\underline{2f}$ 합 $\frac{\pi}{4}$

$f(g'-2)$

$f'g+f(2g)=0$

$\underline{g}(f'+2f)=0$

☆ $g(x)=e^{2x-b}-1$

$g'(x)=2e^{2x-b}$

$\Rightarrow 2g=g'-2$

2025학년도 9월 평가원모의고사 27번

10. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+f\left(\frac{1}{2}\sin x\right)=\sin x$$

를 만족시킬 때, $f'(\pi)$의 값은?

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

① $f(\pi)+f(0)=0$, $f(0)=0$

② $f'(x)+\frac{1}{2}\cos x\, f'\left(\frac{1}{2}\sin x\right)=\cos x$

$x=0$, $f'(0)+\frac{1}{2}f'(0)=1$

$x=\pi$, $f'(\pi)-\frac{1}{2}f'(0)=-1$

1. [정답] ②

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 미적분 26 [3.00점]

[해설]

함수

$$y=e^{x^2}-1 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

와 직선 $y=t$와의 교점 A의 좌표는

$$t=e^{x^2}-1,\quad e^{x^2}=1+t,\quad x=\sqrt{\ln(1+t)}$$

$$\therefore\ \mathrm{A}\left(\sqrt{\ln(1+t)},\ t\right)$$

곡선 ㉠과 직선 $y=5t$와의 교점 B의 좌표는

$$5t=e^{x^2}-1,\quad e^{x^2}=1+5t,\quad x=\sqrt{\ln(1+5t)}$$

$$\therefore\ \mathrm{B}\left(\sqrt{\ln(1+5t)},\ 5t\right)$$

삼각형 ABC의 넓이가 $S(t)$이므로 점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}$$

$$=\frac{1}{2}\times5t\times\left(\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\right)$$

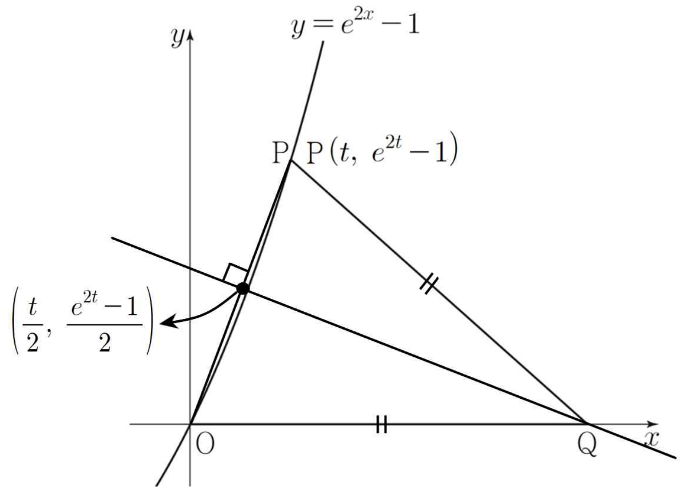
$$\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}=\frac{5}{2}\times\left(\sqrt{\frac{\ln(1+5t)}{t}}-\sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{5}{2}\times\left(\sqrt{\frac{\ln(1+5t)}{t}}-\sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)$$

$$=\frac{5}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

2. 정답 ④



삼각형 OPQ는 이등변 삼각형이므로 점Q에서 선분 OP에 내린 수선은 밑변을 이등분하므로 $\left(\frac{t}{2},\ \frac{e^{2t}-1}{2}\right)$을 지난다.

선분 OP의 기울기는 $\frac{e^{2t}-1}{t}$이고 점 Q를 지나는 직선은 수직이므로

$y=-\frac{t}{e^{2t}-1}\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{e^{2t}-1}{2}$, $y=0$을 대입하면

$$\frac{t}{e^{2t}-1}\left(x-\frac{t}{2}\right)=\frac{e^{2t}-1}{2},\quad x-\frac{t}{2}=\frac{e^{2t}-1}{2}\times\frac{e^{2t}-1}{t},$$

$$x=\frac{t}{2}+\frac{\left(e^{2t}-1\right)^2}{2t},\quad \frac{f(t)}{t}=\frac{1}{2}+\frac{\left(e^{2t}-1\right)^2}{2t^2}$$

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{e^{2t}-1}{t}\times\frac{e^{2t}-1}{t}\right\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times2\times2=\frac{5}{2}$$

3. [정답] ④

4. ③

[출제의도] 두 직선이 이루는 예각의 크기를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가

$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$ 이므로

곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선의 기울기는 $\cos t$ 이다.

따라서 점 P에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$$\tan\theta=\left|\frac{\cos t-(-1)}{1+\cos t\times(-1)}\right|=\left|\frac{\cos t+1}{1-\cos t}\right|$$

그런데 $0<t<\pi$이므로

$$\tan\theta=\frac{\cos t+1}{1-\cos t}$$

따라서

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$$

$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{\frac{\cos t+1}{1-\cos t}}{(\pi-t)^2}$$

$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$$

이므로

$\pi-t=x$라 하면 $t\to\pi-$일 때 $x\to0+$ 이고

$\cos t=\cos(\pi-x)=-\cos x$

이므로

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$$

$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}$$

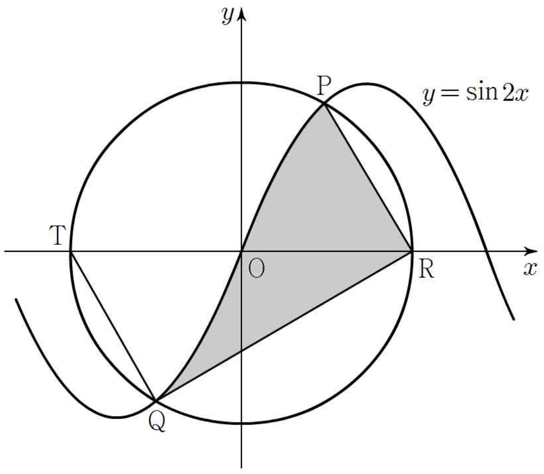
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}$$

$$=\lim_{x\to0+}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{(1+\cos x)^2}\right\}$$

$$=1^2\times\frac{1}{2^2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

5. 20



곡선 $y=\sin 2x$는 원점에 대하여 대칭이므로 곡선과 두 선분 PR, OR로 둘러싸인 부분의 넓이는, 곡선과 두 선분 QT, OT로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. 따라서 구하는 넓이는 삼각형 QRT의 넓이와 같다.

$\overline{TR}=2\overline{OP}=2\sqrt{t^2+\sin^2 2t}$

점 P의 좌표가 $(t,\ \sin 2t)$이므로 $Q(-t,\ -\sin 2t)$

따라서 선분 TR을 밑변으로 하는 삼각형 QRT의 높이는 $\sin 2t$이다.

$\therefore\ S(t)=\frac{1}{2}\times\sin 2t\times 2\sqrt{t^2+\sin^2 2t}=\sin 2t\sqrt{t^2+\sin^2 2t}$

$\therefore\ \lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin 2t\sqrt{t^2+\sin^2 2t}}{t^2}$

$=2\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)\sqrt{1+4\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^2}$

$=2\times 1\times\sqrt{1+4\times 1^2}$

$=2\sqrt{5}$

$k=2\sqrt{5}$ 이므로

$k^2=20$

6. ③

[출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

점 P와 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면 $\overline{OP'}=t$, $\overline{OQ'}=f(t)$

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+t^2\sin^2 t}=t\sqrt{1+\sin^2 t}$

$\overline{OQ}=\overline{OP}-\overline{PQ}=t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$

삼각형 OPP′과 삼각형 OQQ′은 서로 닮음이므로

$\overline{OP'}\ :\ \overline{OQ'}=\overline{OP}\ :\ \overline{OQ}$

$t\ :\ f(t)=t\sqrt{1+\sin^2 t}\ :\ t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$에서

$f(t)=\frac{t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$

$\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t^3}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{1+\sin^2 t}-1}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin^2 t}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$

$=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\times\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$

$=1^2\times\frac{1}{\sqrt{1}\times\left(\sqrt{1}+1\right)}=\frac{1}{2}$

7. 답. 10

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$e^x-1=t$에서 $x=\ln(1+t)$이므로

$H(\ln(1+t),\ 0)$

또 $e^x-1=5t$에서 $x=\ln(1+5t)$이므로

$C(\ln(1+5t),\ 0)$

삼각형 ACB의 넓이는

$S(t)=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{HC}$

$=\frac{1}{2}\times 5t\times\{\ln(1+5t)-\ln(1+t)\}$

$=\frac{5}{2}t\{\ln(1+5t)-\ln(1+t)\}$

따라서

$\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^2}$

$=\frac{5}{2}\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+5t)-\ln(1+t)}{t}$

$=\frac{5}{2}\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{\ln(1+5t)}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t}\right\}$

$=\frac{5}{2}\times\left\{\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+5t)}{5t}\times 5-\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+t)}{t}\right\}$

$=\frac{5}{2}\times(1\times 5-1)$

$=10$

8. **정답** ④

조건 (가)에서 $x\to 1$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\ln\{1+f(x)\}=0$이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$

이때

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x-1}\right]=6$

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}=1$이므로 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=6$

$x-1=t$라 하면 $\lim_{t\to 0}\frac{f(t+1)}{t}=6$ …… ㉠

조건 (나)에서 $x\to 0$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\left\{1-\cos\sqrt{f(x)}\right\}=0$ 이므로 $\lim_{x\to 0}\sqrt{f(x)}=1$

$0\le f(x)<\frac{\pi^2}{4}$에서 $0\le\sqrt{f(x)}<\frac{\pi}{2}$이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

이때

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{f(x)}}{e^x-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\{1-\cos\sqrt{f(x)}\}\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}{(e^x-1)\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2\sqrt{f(x)}}{(e^x-1)\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\sqrt{f(x)}}{(e^x-1)\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2\sqrt{f(x)}}{f(x)}\times\frac{x}{e^x-1}\times\frac{f(x)}{x\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}\right]=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\sqrt{f(x)}}{f(x)}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1,\ \lim_{x\to 0}\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}=2$$
이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ …… ㉡

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)f(\cos x)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(\sin x)}{\sin x}\times\frac{f((\cos x-1)+1)}{\cos x-1}\times\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3}\right\}$$
㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f((\cos x-1)+1)}{\cos x-1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)}{\sin x}=2$이고

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^3(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3}\times\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\cos x+1}$$
$$=1^3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}$$
이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)f(\cos x)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)}{\sin x}\times\lim_{x\to 0}\frac{f((\cos x-1)+1)}{\cos x-1}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3}$$
$$=2\times 6\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-6$$

9. **정답** ②

(i) $g(k)=0$에서 $e^{2k-b}=1$, $k=\frac{b}{2}$, $f(k)=0$에서

$$a\sin\frac{b}{2}-\cos\frac{b}{2}=0$$
$a\sin\frac{b}{2}=\cos\frac{b}{2}$의 양변을 $\cos\frac{b}{2}$로 나누면 $\tan\frac{b}{2}=\frac{1}{a}$ … ㉠

(ii) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=2f(x)$

$(a\cos x+\sin x)(e^{2x-b}-1)+2e^{2x-b}(a\sin x-\cos x)=2a\sin x-2\cos x$

$(a\cos x+\sin x)(e^{2x-b}-1)+2(e^{2x-b}-1)(a\sin x-\cos x)=0$

$(e^{2x-b}-1)(2a\sin x-2\cos x+a\cos x+\sin x)=0$

$2a\sin x-2\cos x+a\cos x+\sin x=0$ 에서

$(2a+1)\sin x+(a-2)\cos x=0$, $(2-a)\cos x=(2a+1)\sin x$

$\tan x=\frac{2-a}{2a+1}$의 근을 α라 할 때, $\tan\alpha=\frac{2-a}{2a+1}$

$e^{2x-b}-1=0$에서 $x=\frac{b}{2}$,

두 근의 합은 $\frac{\pi}{4}$이므로 $\alpha+\frac{b}{2}=\frac{\pi}{4}$

(iii) ㉠에서 $\tan\frac{b}{2}=\frac{1}{a}$이므로 $\tan\left(\alpha+\frac{b}{2}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$$\tan\left(\alpha+\frac{b}{2}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{b}{2}}{1-\tan\alpha\tan\frac{b}{2}}=\frac{\frac{2-a}{2a+1}+\frac{1}{a}}{1-\frac{2-a}{2a+1}\times\frac{1}{a}}=1$$
$$\frac{2-a}{2a+1}+\frac{1}{a}=1-\frac{2-a}{a(2a+1)},\ \frac{2a-a^2+2a+1}{a(2a+1)}=\frac{2a^2+a-2+a}{a(2a+1)}$$
$$-a^2+4a+1=2a^2+2a-2,\ 3a^2-2a-3=0$$
(iv) $\tan b=\tan\left(\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\right)=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a^2}}=\frac{\frac{2}{a}}{\frac{a^2-1}{a^2}}=\frac{2a}{a^2-1}$

$$3(a^2-1)-2a=0,\ 3(a^2-1)=2a,\ \frac{2a}{a^2-1}=3$$
$$\therefore\ \tan b=\frac{2a}{a^2-1}=3$$

10. [정답] ②

[해설]

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)+\frac{1}{2}cos\,x\times f'\left(\frac{1}{2}sin x\right)=\cos x$$
$x=0$을 대입하면

$$f'(0)+\frac{1}{2}\times f'(0)=1,\qquad f'(0)=\frac{2}{3}$$
$x=\pi$를 대입하면

$$f'(\pi)-\frac{1}{2}f'(0)=-1$$
$f'(0)=\frac{2}{3}$ 이므로 $f'(\pi)=-\frac{2}{3}$

TH①. 미분법

2025년 6월 평가원모의고사

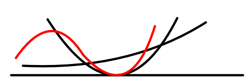
2025 Trend

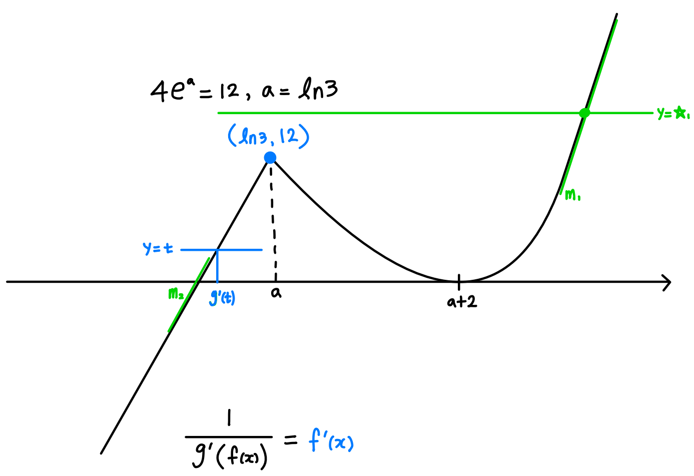
1. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}(x-a-2)^2e^x & (x \geq a)\\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x<a)\end{cases}$$

일 때, 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=12$에서만 불연속일 때, $\dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $6e^4$　② $9e^4$　③ $12e^4$
④ $8e^6$　⑤ $10e^6$





$$\frac{1}{g'(f(x))}=f'(x)$$

$\dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}$　$\dfrac{f'(a+6)}{f'(a+2)}$ m_1 …★$_1$, m_2 …★$_2$

$$\frac{g'(f(a+2)) \to (1)}{g'(f(a+6)) \to (2)}$$

$48e^6$

역함수 미분

$$=\frac{f'(a+6)}{e^{2a}} \quad \frac{72e^6}{9}$$

2024년 수능특강 Lv3

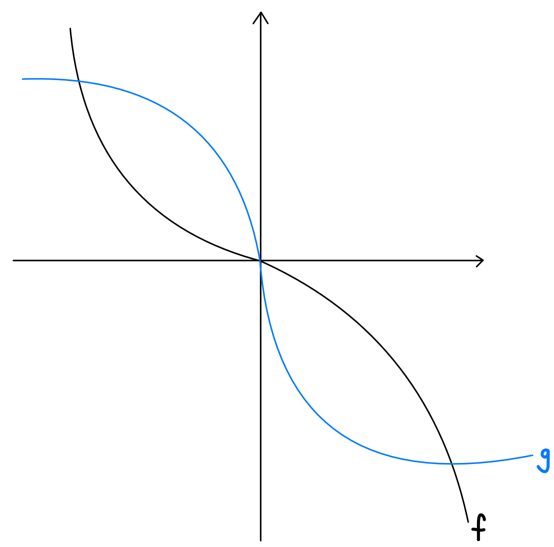
연계가능성 높음

2. 함수 $f(x)=e^{ax}-e^{-ax}\ (a<0)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 등식

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)+g(x)}{(x-b)g\left(x-\frac{3}{2}\right)}=-\frac{4a^3+a}{2f''\left(\frac{3}{2}\right)}$$

를 만족시키는 실수 b가 존재할 때, 상수 a의 값은?

① $-\dfrac{5}{3}\ln 2$　② $-\dfrac{4}{3}\ln 2$　③ $-\ln 2$
④ $-\dfrac{2}{3}\ln 2$　⑤ $-\dfrac{1}{3}\ln 2$



$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)+g(x)}{(x-b)g\left(x-\frac{3}{2}\right)}$$

① $f(b)+g(b)=0$, $b=0$ (only)

② $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x\,g\left(-\frac{3}{2}\right)}=-\frac{4a^3+a}{2f''\left(\frac{3}{2}\right)}$

$f'(0)+\dfrac{1}{f'(0)}$

역수! (교점)

$f(g(x))=x$

$f\left(\boxed{g\left(-\frac{3}{2}\right)}\right)=-\frac{3}{2}$

$\frac{1}{a}x-\ln 2$

3. 최고차항의 계수가 1이고 역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 실수 k $(k>0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-k}{x-k} & (x\neq k)\\ \dfrac{1}{3} & (x=k)\end{cases}$$

범위(역함수 의심하기) → $f'(x)\geq 0$

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(0)$의 값이 최대일 때, k의 값을 α라 하자.

(가) $h(0)=1$
(나) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$k=\alpha$일 때, $\alpha\times h(9)\times g'(9)$의 값은?

① $\frac{1}{84}$ ② $\frac{1}{42}$ ③ $\frac{1}{28}$ ④ $\frac{1}{21}$ ⑤ $\frac{5}{84}$

$h(0)=1$, $\dfrac{g(0)-k}{-k}=1$, $g(0)=0$, $f(0)=0$

$\lim_{x\to k}\dfrac{g(x)-k}{x-k}=\dfrac{1}{3}$, $g(k)=\frac{1}{k}$, $g'(k)=\frac{1}{3}$

$f(k)=k$, $f'(k)=3$

$f(x)-x=x(x-k)(x-p)$

$3-1=k(k-p)$, $p=k-\frac{2}{k}$

$f'(0)-1=kp=k^2-2$

$f'(0)=\boxed{k^2-1}$ 최댓값

→ 범위? ∴ ㄱ

「$f'(x)\geq 0$」 2차

↓

$D\leq 0$ 노가다

연계가능성 높음

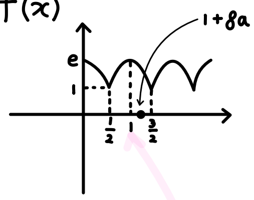
4. 두 함수 $f(x)=e^{|\cos\pi x|}$, $g(x)=ax^3+ax-2a+1$에 대하여 함수 $(f\circ g)(x)$가 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하도록 하는 양수 a의 최댓값은?

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

$e^x\circ|\cos\pi x|$

주기, 선대칭

$f(x)$



$f($ $g(x)$ $)$가 미분가능

$g(0)<$ 증가 $<g(2)$

$-2a+1$ $1+8a$

(1을 기준으로 $-2a$와 $+8a$ 구간)

$1+8a\leq\frac{3}{2}$

$a\leq\frac{1}{16}$

2025학년도 사관학교

5. 함수 $f(x) = \ln(e^x + 2)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $h(x) = \{g(x)\}^2$에 대하여 $h'(\ln 4)$의 값은?

① $2\ln 2$ ② $3\ln 2$ ③ $4\ln 2$
④ $5\ln 2$ ⑤ $6\ln 2$

2022학년도 6월 평가원모의고사

6. $t > 2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x) = t(\ln x)^2 - x^2$이 $x = k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha) = e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha \times \{g'(\alpha)\}^2 = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$f'(x) = \underline{t \times 2 \times \ln x - 2x = 0}$

$g(t)$

$t = \frac{x^2}{\ln x} = h(x)$라 setting

$h(g(t)) = t$ h와 g 역이라 생각!

2024년 수능특강 Lv3

연계가능성 높음

7. $0<t<\frac{5}{2}$인 실수 t에 대하여 열린구간 (0, π)에서 정의된 함수 $f(x)=2tx-t\cos x-5\sin x$가 있다. x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하면 함수 $g(t)$는 열린구간 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$에서 미분가능하다. $g(\alpha)=\frac{\pi}{6}$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times g'(\alpha)$의 값은?

① $-\frac{7\sqrt{3}}{8}$ ② $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ③ $-\frac{5\sqrt{3}}{8}$

④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$

2022학년도 사관학교

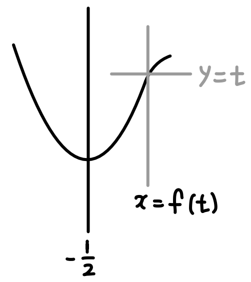
8. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(2x^2+2x+1)(x>0)$과 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $f'(2\ln 5)$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{14}$ ② $\frac{13}{7}$ ③ $\frac{27}{14}$

④ 2 ⑤ $\frac{29}{14}$

$\cancel{y} = \ln x \cdot 2x^2+2x+1$ 선대칭

$g(x)$



$\boxed{g(f(t))=t}$

TH②. 매개변수 미분법

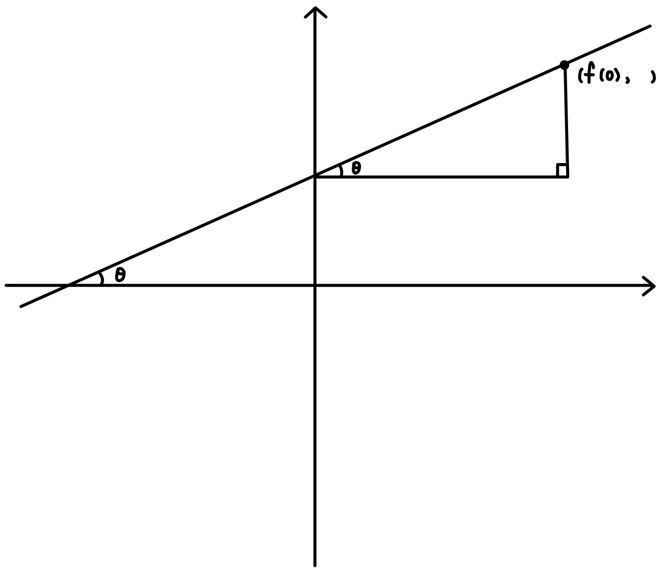
2024년 10월 교육청모의고사

2025 Trend

9. 점 $(0, 1)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l과 곡선

$$y=e^{\frac{x}{a}}-1\ (a>0)$$

이 있다. 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때, 직선 l이 곡선 $y=e^{\frac{x}{a}}-1\ (a>0)$과 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 $f(\theta)$라 하자. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=a$일 때, $\sqrt{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=pe+q$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고 p, q는 정수이다.)



$$\text{기울기}=\frac{e^{\frac{f(\theta)}{a}}-2}{f(\theta)}=\tan\theta$$

2024년 5월 교육청모의고사

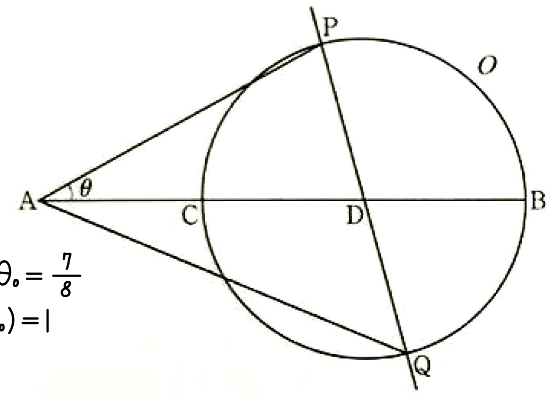
2025 Trend

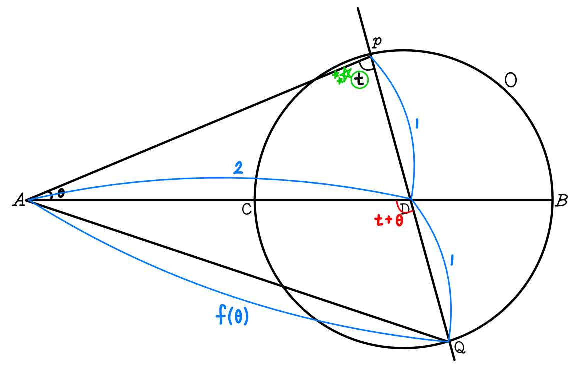
10. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB를 삼등분하는 점 중 A와 가까운 점을 C, B와 가까운 점을 D라 하고, 선분 BC를 지름으로 하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P를 $\angle\mathrm{BAP}=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$가 되도록 잡고, 두 점 P, D를 지나는 직선이 원 O와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 선분 AQ의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $\cos\theta_0=\frac{7}{8}$인 θ_0에 대하여 $f'(\theta_0)=k$이다. k^2의 값을 구하시오. (단, $\angle\mathrm{APD}=\frac{\pi}{2}$이고 $0<\theta_0<\frac{\pi}{6}$이다.)

[4점] 정답: 40

$\cos\theta_0=\frac{7}{8}$

$f'(\theta_0)=1$





① $\frac{2}{\sin t}=\frac{1}{\sin\theta}$, $2\sin\theta=\sin t \rightarrow 2\cos\theta=\boxed{\frac{dt}{d\theta}}\cos t$

$4(1-\cos^2\theta)=1-\cos^2 t$

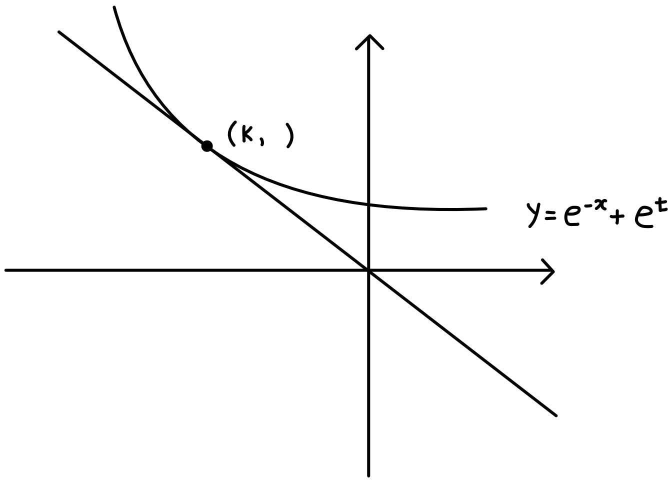
② $f(\theta)^2=5-4\cos(t+\theta)$

$2f'(\theta)f(\theta)=+4\sin(t+\theta)\left(\frac{dt}{d\theta}+1\right)$

$\cos\theta_0=\frac{7}{8}$

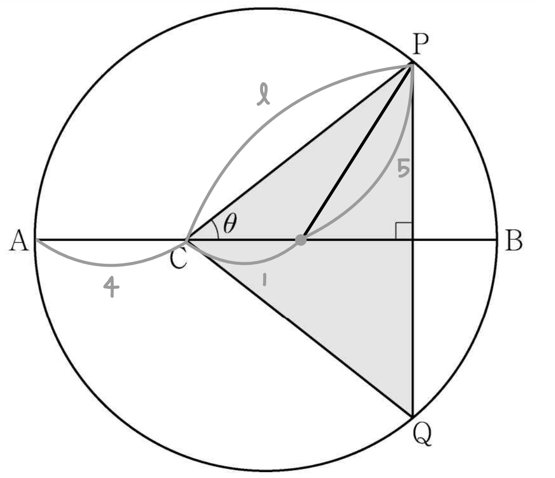
11. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$
④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$



$$\frac{e^{-k}+e^{t}}{k}=-e^{-k}=f(t)$$

12. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{AC}=4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle PCB=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



$S(\theta)=\frac{1}{2}\ell^2\sin 2\theta$

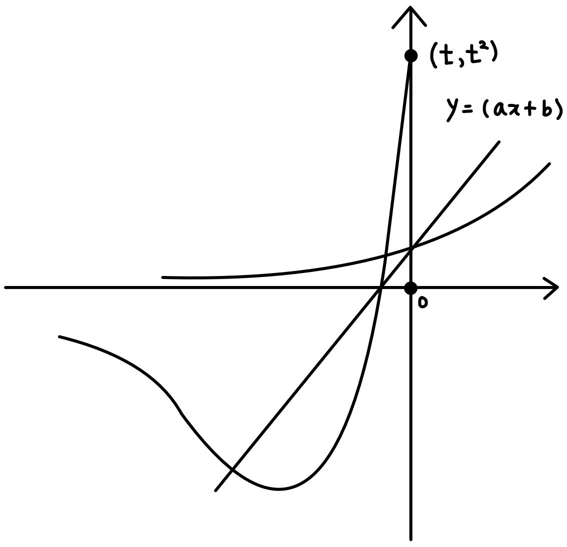
$25=1+\ell^2-2\ell\cos\theta$

13. 양의 실수 t와 상수 k $(k>0)$에 대하여

곡선 $y=(ax+b)e^{x-k}$이 직선 $y=tx$와 점 $(t,\ t^2)$에서 접하도록 하는 두 실수 $a,\ b$의 값을 각각 $f(t),\ g(t)$라 하자. $f(k)=-6$일 때, $g'(k)$의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2



(1) $t^2=(at+b)e^{t-k}$ 값

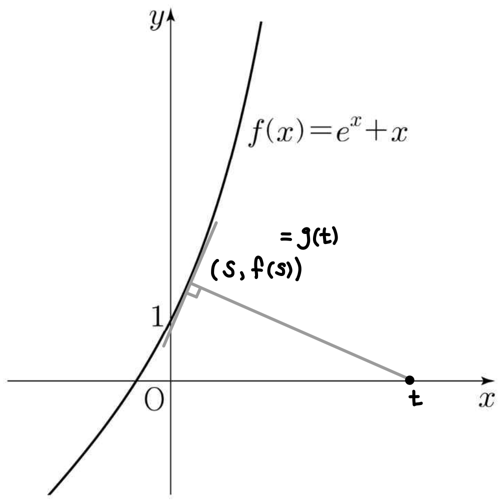
(2) $t=(a+at+b)e^{t-k}$ 기울기

(3) $-(1)=t-t^2=\cancel{a}e^{t-k}$

$f(t)$

$f(t)=(t-t^2)e^{k-t}$

14. 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t,\ 0)$과 점 $(x,\ f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]



$h'(1)=?$

$f(s)=g(t)=e^s+s \ \underset{}{=1}$, $(e^s+1)\times\dfrac{-e^s-1}{t-s}=-1$

$g(h(t))=t$

1st $\boxed{h'(t)}\,g'(\boxed{h(t)})=1$? 2nd

$\rightarrow g'(4)$

$g(h(1))=1$

4 $s=0, t=4$

$(e^s+1)^2=t-s$

$g'(\cancel{t})=\dfrac{ds}{dt}(\cancel{e^s+1})$
4 2

$\dfrac{ds}{dt}\left(2(e^s+1)e^s+1\right)=1$

① $g(\underbrace{h(\cancel{t})}_{2})=\cancel{t}$, $h'(\cancel{t})g'\boxed{(h(\cancel{t}))}=1$ (1, 1, 1, 1, 2)

② $(e^s+1)\times\dfrac{-(e^s+s)}{t-s}=-1$

③ $f(s)=g(\underset{2}{\cancel{t}})=e^s+s=1$ $\rightarrow g(\underset{2}{\cancel{t}})=\dfrac{ds}{dt}(\underset{2}{\cancel{e^s+1}})$

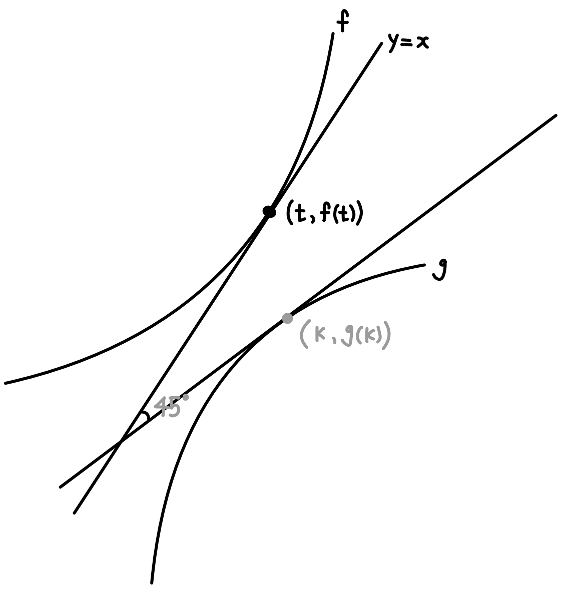
$s=0, t=2$

$(e^s+1)(e^s+s)=t-s$

$(e^s(e^s+s)+e^s+1)^2+1=1$

2024년 수능완성

15. 함수 $f(x)=e^{x}+x$와 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(k,\ g(k))$에서의 접선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$가 되도록 하는 실수 k의 값을 $h(t)$라 하자. $16\times\{h'(\ln 8)\}^{2}$의 값을 구하시오. [4점]



$$\frac{f'(t)-g'(k)}{1+f'(t)g'(k)} = 1 = \tan 45^\circ$$

$$1+f'(t)g'(k) = f'(t)-g'(k)$$

$$g'(k) = \frac{f'(t)-1}{f'(t)+1} = \frac{e^t}{e^t+2}$$

$$f'(g(k)) = \frac{1}{g'(k)} = \frac{e^t+2}{e^t}$$

$$e^{g(k)}+1 = 1+\frac{2}{e^t}$$

$$g(k) = \ln\frac{2}{e^t}$$

$h(t)$

2024년 수능특강 **New**

16. $0<t<1$인 실수 t에 대하여 함수

$$f(x)=\ln(1+e^{x})-tx$$

의 극값을 $g(t)$라 할 때, $g(t)$의 최댓값은?

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$
④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

① $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - t = 0$

$e^x(t-1) = -t$

$e^x = \frac{t}{1-t}$, $x = \ln\left(\frac{t}{1-t}\right)$

② $f\left(\ln\left(\frac{t}{1-t}\right)\right) = g(t)$

1. [정답] ④

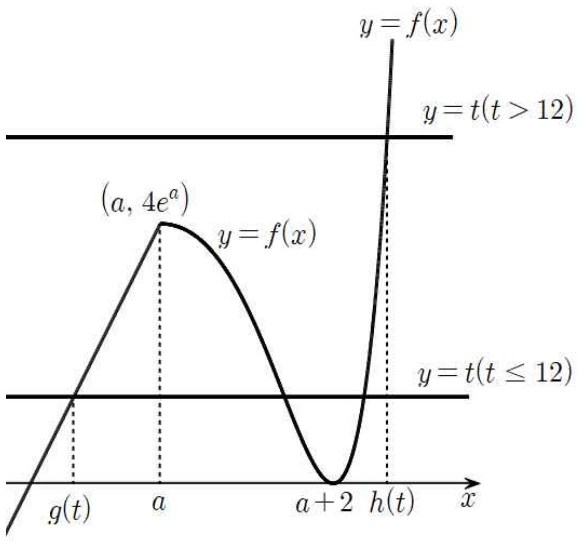
[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 미적분 28 [4.00점]

[해설]

함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-a-2)^2e^x & (x\geq a)\\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x<a)\end{cases}$$

의 그래프는 아래와 같다.



함수 $f(x)$는 $f(a)=4e^a$이고 함수 $g(t)$의 그래프는 $t=4e^a$에서만 불연속이므로

$$4e^a=12 \qquad \therefore\ e^a=3,\ a=\ln 3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$t\leq 12$일 때 직선 $y=t$와 함수 $y=e^{2a}(x-a)+4e^a$가 만나는 점의 x좌표는 $x=\dfrac{t-4e^a}{e^{2a}}+a$

이고 ㉠에 의하여 $x=\dfrac{t-12}{9}+\ln 3$

$t>12$일 때 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표를 $h(t)$라 하면

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{t-12}{9}+\ln 3 & (t\leq 12)\\ h(t) & (t>12)\end{cases} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이고

$$f(h(t))=t \qquad \cdots\cdots ㉢$$

이므로 ㉢의 양변을 t에 관하여 미분하면

$$f'(h(t))h'(t)=1,\ h'(t)=\frac{1}{f'(h(t))}$$

㉡의 양변을 t에 관하여 미분하면

$$g'(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{9} & (t\leq 12)\\ \dfrac{1}{f'(h(t))} & (t>12)\end{cases}$$

한편,

$$f(a+2)=0,\ f(a+6)=16e^{a+6}=48e^6$$

이고

$$f'(x)=\begin{cases}(x-\ln 3-2)(x-\ln 3)e^x & (x>\ln 3)\\ 9 & (x<\ln 3)\end{cases}$$

이므로

$$g'(f(a+2))=g'(0)=\frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned}g'(f(a+6))&=g'(a+6)\\&=g'(48e^6)\\&=\frac{1}{f'(a+6)}\ (\because\ h(48e^6)=a+6)\\&=\frac{1}{f'(6+\ln 3)}\\&=\frac{1}{4\times 6\times 3\times e^6}=\frac{1}{72}e^{-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}&=\frac{1}{9}\times 72\times e^6\\&=8e^6\end{aligned}$$

2. ④

$\displaystyle\lim_{x\to b}\frac{f(x)+g(x)}{(x-b)g\left(x-\frac{3}{2}\right)}=-\frac{4a^3+a}{2f''\left(\frac{3}{2}\right)}$에서 $x\to b$일 때,

(분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0 이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to b}\{f(x)+g(x)\}=0$이고 두 함수 $f(x),\ g(x)$ 는 연속이므로

$$f(b)+g(b)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

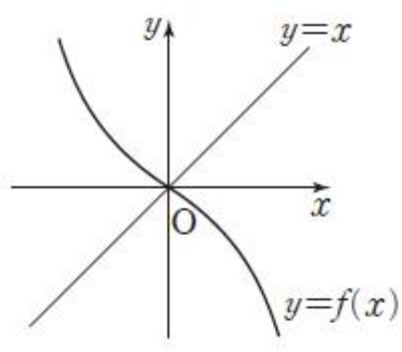
$f(x)=e^{ax}+e^{-ex}$ 에서

$f'(x)=ae^{ax}+ae^{-ax}=a\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)$

이때, $a<0$이고 모든 실수 x에 대하여 $e^{ax}+e^{-ax}>0$ 이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이다.

즉, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

또한 $f(0)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점을 지나면서 제2사분면과 제4사분면만을 지나고, 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=g(x)$도 원점을 지나면서 제2사분면과 제4사분면만을 지난다.



$b>0$이면 $f(b)<0,\ g(b)<0$이므로 $f(b)+g(b)<0$이고,

$b<0$이면 $f(b)>0,\ g(b)>0$이므로 $f(b)+g(b)>0$이다.

즉 ㉠을 만족시키는 실수 b의 값은 0이다.

$f(0)=0$에서 $g(0)=0$이고,

$f'(0)=2a,\ g'(0)=\dfrac{1}{f'(g(0))}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2a}$ 이므로,

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)+g(x)}{(x-b)g\left(x-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{xg\left(x-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)-f(0)+g(x)-g(0)}{x}\times\frac{1}{g\left(x-\frac{3}{2}\right)}\right\}$$

$$=\{f'(0)+g'(0)\}\times\frac{1}{g\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\left(2a+\frac{1}{2a}\right)\times\frac{1}{g\left(-\frac{3}{2}\right)} \quad \cdots\cdots ㉡$$

한편, 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=e^{-ax}-e^{ax}=-f(x)$ 이고,

$f'(x)=a(e^{ax}+e^{-ax})$ 에서,

$f''(x)=a^2(e^{ax}-e^{-ax})=a^2f(x)$ 이므로

$f''\left(\frac{3}{2}\right)=a^2f\left(\frac{3}{2}\right)=-a^2f\left(-\frac{3}{2}\right)$

즉, $-\dfrac{4a^3+a}{2f''\left(\frac{3}{2}\right)}=-\dfrac{4a^3+a}{2\times\left\{-a^2f\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}}$

$$=\frac{4a^3+a}{2a^2}\times\frac{1}{f\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\left(2a+\frac{1}{2a}\right)\times\frac{1}{f\left(-\frac{3}{2}\right)} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=g\left(-\frac{3}{2}\right)$이다.

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=k$라 하면, $g\left(-\frac{3}{2}\right)=k$에서 $f(k)=-\frac{3}{2}$ 이므로

곡선 $y=f(x)$는 점 $\left(k,\ -\frac{3}{2}\right)$을 지난다.

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-f\left(-\frac{3}{2}\right)=-k$ 이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $\left(\frac{3}{2},\ -k\right)$를 지난다.

이때, $k\neq\frac{3}{2}$이면 곡선 $y=f(x)$위의 두 점 $\left(k,\ -\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2},\ -k\right)$를 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{-k-\left(-\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}-k}=1$$

이므로 평균값 정리에 의하여 $f'(c)=1$인 c가 적어도 하나 존재한다. 그러나 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 $f'(c)=1$인 c는 존재하지 않는다. 그러므로 $k=\frac{3}{2}$이다.

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$ 에서 $e^{-\frac{3}{2}a}-e^{\frac{3}{2}a}=\frac{3}{2}$

$e^{-\frac{3}{2}a}=t\,(t>1)$ 이라 하면,

$t-\frac{1}{t}=\frac{3}{2}$에서

$2t^2-3t-2=0$

$(2t+1)(t-2)=0$

$t>1$이므로 $t=2$

따라서 $e^{-\frac{2}{3}a}=2$ 에서 $-\frac{3}{2}a=\ln2$

$a=-\frac{2}{3}\ln 2$

3. [정답] ②

[해설]

조건 (가)에 의하여 $h(0)=\dfrac{g(0)-k}{0-k}=1$

$g(0)=0,\ f(0)=0$

조건 (나)에 의하여

함수 $h(x)$는 $x=k$에서 연속이므로

$h(k)=\lim_{x\to k}h(x)=\lim_{x\to k}\dfrac{g(x)-k}{x-k}$

$g(k)=k,\ f(k)=k$

$\lim_{x\to k}\dfrac{g(x)-k}{x-k}=\lim_{x\to k}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}=\dfrac{1}{3}$

$g'(k)=\frac{1}{3}$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(k)=\dfrac{1}{f'(g(k))}=\dfrac{1}{f'(k)}=\dfrac{1}{3}$

$f'(k)=3$

$f(0)=0,\ f(k)=k$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는

$f(x)-x=x(x-k)(x-t)$ (t는 상수)

$f(x)=x(x-k)(x-t)+x$

$f(x)=x^3-(k+t)x^2+(tk+1)x$

$f'(x)=3x^2-2(k+t)x+tk+1$

$f'(k)=3$이므로 $k^2-tk-2=0$

$t=k-\frac{2}{k}$ $\cdots\cdots$ ㉠

역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=3x^2-2(k+t)x+tk+1\geq 0$

x에 대한 이차방정식

$3x^2-2(k+t)x+tk+1=0$의 판별식을

D라 하면

$D=4(k+t)^2-12(tk+1)\leq 0$

㉠을 대입하여 정리하면 $k^2-5+\frac{4}{k^2}\leq 0$이고

$k>0$이므로 양변에 k^2을 곱하면

$k^4-5k^2+4\leq 0$

$(k^2-1)(k^2-4)\leq 0$

$(k-1)(k+1)(k-2)(k+2)\leq 0$

$k+1>0,\ k+2>0$이므로

$(k-1)(k-2)\leq 0$

$1\leq k\leq 2$

$f'(0)=tk+1=k^2-1$이므로

$k=2$일 때, $f'(0)$의 값이 최대이다.

그러므로 $\alpha=2$이고 이때 $t=1$이므로

$f(x)=x^3-3x^2+3x$

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$ …… ㉡

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-2}{x-2} & (x\neq 2) \\ \dfrac{1}{3} & (x=2) \end{cases}$$

이다.

$h(9)=\dfrac{g(9)-2}{9-2}$ …… ㉢

$g(9)=p$라 할 때, $f(p)=9$이므로

$p^3-3p^2+3p=9$

$p^3-3p^2+3p-9=0$

$(p-3)(p^2+3)=0$

$p=3$이므로 $g(9)=3$

㉢에 대입하여 정리하면 $h(9)=\dfrac{1}{7}$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(9)=\dfrac{1}{f'(g(9))}=\dfrac{1}{f'(3)}$

㉡에 의하여 $f'(3)=12$이므로

$g'(9)=\dfrac{1}{12}$

따라서

$\alpha\times h(9)\times g'(9)=2\times\dfrac{1}{7}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{42}$

4. 답. ②

$0<x\le\dfrac{1}{2}$ 또는 $\dfrac{3}{2}\le x<2$에서 $\cos\pi x\ge 0$,

$\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$에서 $\cos\pi x<0$이므로

$$f(x)=\begin{cases} e^{\cos\pi x} & \left(0<x\le\dfrac{1}{2} \text{ 또는 } \dfrac{3}{2}\le x<2\right) \\ e^{-\cos\pi x} & \left(\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$

$(e^{\cos\pi x})'=e^{\cos\pi x}\times(\cos\pi x)'=-\pi e^{\cos\pi x}\sin\pi x$,

$(e^{-\cos\pi x})'=e^{-\cos\pi x}\times(-\cos\pi x)'=\pi e^{-\cos\pi x}\sin\pi x$

이므로

$$f(x)=\begin{cases} -\pi e^{\cos\pi x}\sin\pi x & \left(0<x<\dfrac{1}{2} \text{ 또는 } \dfrac{3}{2}<x<2\right) \\ \pi e^{-\cos\pi x}\sin\pi x & \left(\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$

이고 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{2}, x=\dfrac{3}{2}$에서 미분가능하지 않다.

한편, 함수 $g(x)=ax^3+ax-2a+1$에서

$g'(x)=3ax^2+a$이고 $a>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)>0$이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

또한 방정식 $x^3+x-2=0$의 실근은

$(x-1)(x^2+x+2)=0$에서 $x=1$뿐이므로

$g(x)=ax^3+ax-2a+1=a(x^3+x-2)+1$에서 곡선 $y=g(x)$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 1)$을 지난다.

$h(x)=(f\circ g)(x)$라 하자.

만약 $0<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{1}{2}<g(x)<\dfrac{3}{2}$이면

$h(x)=f(g(x))=e^{-\cos\{\pi g(x)\}}$

이고 합성함수의 미분법에 의하여 함수 $h(x)$는 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하다.

함수 $g(x)$는 열린구간 $(0, 2)$에서 증가하므로 $0<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{1}{2}<g(x)<\dfrac{3}{2}$이려면

$g(0)\ge\dfrac{1}{2}, g(2)\le\dfrac{3}{2}$를 만족시키면 된다.

$g(0)=-2a+1\ge\dfrac{1}{2}$에서 $a\le\dfrac{1}{4}$ …㉠

$g(2)=8a+1\le\dfrac{3}{2}$에서 $a\le\dfrac{1}{16}$ …㉡

㉠, ㉡에서 $a\le\dfrac{1}{16}$이다.

한편, $a>\dfrac{1}{16}$일 때, $g(1)=1<\dfrac{3}{2}$, $g(2)=8a+1>\dfrac{3}{2}$이고 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이므로 사잇값의 정리에 의하여 $g(c)=\dfrac{3}{2}$인 실수 $c\,(1<c<2)$가 존재한다.

이때 $p(x)=e^{-\cos\{\pi g(x)\}}$, $q(x)=e^{\cos\{\pi g(x)\}}$이라 하면

$p'(x)=\sin\{\pi g(x)\}\times\pi g'(x)\times e^{-\cos\{\pi g(x)\}}$

$q'(x)=-\sin\{\pi g(x)\}\times\pi g'(x)\times e^{\cos\{\pi g(x)\}}$

에서 $p'(c)=-\pi g'(c)$, $q'(c)=\pi g'(c)$이고

$g'(c)>0$이므로

$$\lim_{x\to c-}\frac{h(x)-h(c)}{x-c}=\lim_{x\to c-}\frac{e^{-\cos\{\pi g(x)\}}-1}{x-c}=p'(c)=-\pi g'(c)<0$$

$$\lim_{x\to c+}\frac{h(x)-h(c)}{x-c}=\lim_{x\to c+}\frac{e^{\cos\{\pi g(x)\}}-1}{x-c}=q'(c)=\pi g'(c)>0$$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=c$에서 미분가능하지 않다.

따라서 구하는 양수 a의 최댓값은 $\dfrac{1}{16}$이다.

5. [정답] ③

6. 17

[출제의도] 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$f'(x)=\dfrac{2t\ln x}{x}-2x=\dfrac{2t\ln x-2x^2}{x}$

이고 $f(x)$는 $x=k$에서 극대이므로

$2t\ln k-2k^2=0$

$t\ln k=k^2$

이때 실수 k의 값을 $g(t)$라 했으므로

$t\ln g(t)=\{g(t)\}^2$ …… ㉠

그런데 $g(\alpha)=e^2$이므로

㉠에 $t=\alpha$를 대입하면

$\alpha\ln g(\alpha)=\{g(\alpha)\}^2$

$2\alpha=e^4$, $\alpha=\dfrac{e^4}{2}$

또한, ㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\ln g(t)+t\times\dfrac{g'(t)}{g(t)}=2g(t)\times g'(t)$

이 식에 $t=\alpha$를 대입하면

$\ln g(\alpha)+\alpha\times\dfrac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}=2g(\alpha)\times g'(\alpha)$

$2+\dfrac{e^4}{2}\times\dfrac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}=2e^2\times g'(\alpha)$

$\dfrac{3}{2}e^2\times g'(\alpha)=2$

$g'(\alpha)=\dfrac{4}{3e^2}$

$\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\dfrac{e^4}{2}\times\dfrac{16}{9e^4}=\dfrac{8}{9}$

따라서 $p=9,\ q=8$이므로

$p+q=17$

7. 답. ③

$f(x)=2tx-t\cos x-5\sin x$ 에서

$f'(x)=2t+t\sin x-5\cos x$ ⋯㉠

$f'(g(t))=0$ 이므로 ㉠의 양변에 $x=g(t)$를 대입하면

$2t+t\sin\{g(t)\}-5\cos\{g(t)\}=0$ ⋯㉡

$g(\alpha)=\dfrac{\pi}{6}$ 이므로 ㉡의 양변에 $t=\alpha$를 대입하면

$2\alpha+\alpha\sin\dfrac{\pi}{6}-5\cos\dfrac{\pi}{6}=0$

$\dfrac{5}{2}\alpha-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}=0$

즉, $\alpha=\sqrt{3}$ 이고 α는 열린구간 $\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$에 속한다.

함수 $g(t)$가 열린구간 $\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$에서 미분가능하므로 ㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$2+\sin\{g(t)\}+t\times\cos\{g(t)\}\times g'(t)+5\sin\{g(t)\}\times g'(t)=0$

위 식의 양변에 $t=\alpha$를 대입하면

$2+\sin\{g(\alpha)\}+\alpha\times\cos\{g(\alpha)\}\times g'(\alpha)+5\sin\{g(\alpha)\}\times g'(\alpha)=0$

이때 $\alpha=\sqrt{3}$, $g(\alpha)=\dfrac{\pi}{6}$ 이므로

$2+\sin\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}\times\cos\dfrac{\pi}{6}\times g'(\alpha)+5\sin\dfrac{\pi}{6}\times g'(\alpha)=0$

$2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}g'(\alpha)+\dfrac{5}{2}g'(\alpha)=0$

$4g'(\alpha)=-\dfrac{5}{2}$

$g'(\alpha)=-\dfrac{5}{8}$

따라서

$\alpha\times g'(\alpha)=\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{5}{8}\right)=-\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$

8. ①

$g(x)=\ln(2x^2+2x+1)\ (x>0)$라 두자

$g(x)$를 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=\dfrac{4x+2}{2x^2+2x+1}$

$g(x)$와 $y=t$가 만나는 x좌표를 $f(t)$이면 $g(f(t))=t$이다.

$g(f(2\ln 5))=2\ln 5=\ln 25$

$f(2\ln 5)=k$라 치환하면 $g(k)=\ln 25$

$\ln(2k^2+2k+1)=\ln 5,\ 2k^2+2k+1=5$

$k^2+k-12=0\ (k>0)$

$\therefore\ k=3$

$g(f(t))=t$를 t에 대해 미분하면 $g'(f(t))\cdot\ f'(t)=1$

$\therefore\ f'(2\ln 5)=\dfrac{1}{g'(f(2\ln 5))}$

$=\dfrac{1}{g'(3)}$

$=\dfrac{18+6+1}{14}$

$=\dfrac{25}{14}$

9. [정답] 5

[해설]

직선 l의 기울기는 $\tan\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$이므로

직선 l의 방정식은 $y=(\tan\theta)x+1$

직선 $y=(\tan\theta)x+1$ 이 곡선 $y=e^{\frac{x}{a}}-1$과 만나는 점의 x좌표가 $f(\theta)$ 이므로

$\tan\theta\times f(\theta)+1=e^{\frac{f(\theta)}{a}}-1$ ⋯⋯ ㉠

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 일 때, $a+1=e-1,\ a=e-2$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$\sec^2\theta\times f(\theta)+\tan\theta\times f'(\theta)=\dfrac{f'(\theta)}{a}e^{\frac{f(\theta)}{a}}$ 에서

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 일 때, $2(e-2)+f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{e-2}\times e$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=(e-2)^2$ 이므로 $\sqrt{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}=e-2$

따라서 $p=1,\ q=-2$이므로 $p^2+q^2=5$

10. 정답

[출제 의도]

11. ①

접점의 좌표를 $\left(g(t),\ e^{-g(t)}+e^t\right)$라 하자.

$y=\dfrac{1}{e^x}+e^t$ 에서 $\dfrac{dy}{dx}=-e^{-x}$ 이므로

$f(t)=-e^{-g(t)},\qquad f'(t)=g'(t)e^{-g(t)}$

$f(a)=-e^{-\frac{3}{2}}$ 에서 $\qquad g(a)=-\dfrac{3}{2}$ ⋯⋯ ㉠

이때 접선의 방정식은

$y=-e^{-g(t)}(x-g(t))+e^{-g(t)}+e^t$

에서 이 직선이 원점을 지나므로

$e^{-g(t)}g(t)+e^{-g(t)}+e^t=0$ ⋯⋯ ㉡

이 식에 $t=a$를 대입하면

$e^{\frac{3}{2}}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)+e^{\frac{3}{2}}+e^a=0,\qquad e^a=\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$ ⋯⋯ ㉢

또 ㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$-g'(t)e^{-g(t)}g(t)+e^{-g(t)}g'(t)-g'(t)e^{-g(t)}+e^t=0$

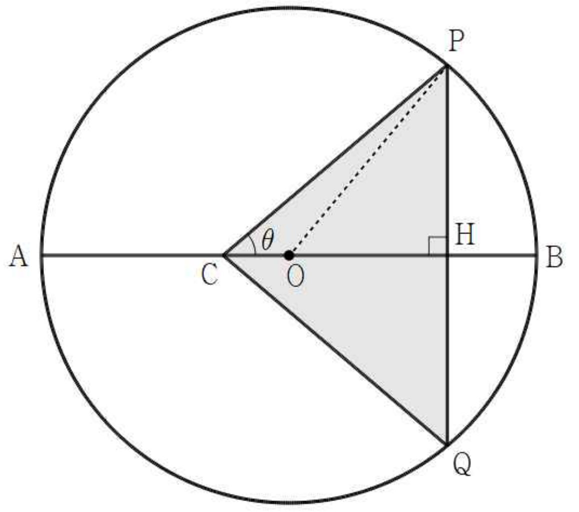
$g'(t)e^{-g(t)}g(t)=e^t$

이 식에 $t=a$를 대입하면 ㉠, ㉢에 의하여

$g'(a)e^{\frac{3}{2}}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=e^a,\qquad g'(a)=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ f'(a)=g'(a)\times e^{-g(a)}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\times e^{\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{3}e\sqrt{e}$

12. 32



원의 중심을 O, 선분 AB와 선분 PQ의 교점을 H, $\overline{CP}=x$라고 하면 $\overline{OC}=1$, $\overline{OP}=5$이므로 코사인법칙에 의하여

$25=x^2+1-2x\cos\theta$, $\quad (x-\cos\theta)^2=24+\cos^2\theta$

$x=\cos\theta+\sqrt{24+\cos^2\theta}$ ($\because\ x>0$)

$\overline{CP}=\overline{CQ}=x$, $\angle PCQ=2\theta$이므로 삼각형 PCQ의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\left(\cos\theta+\sqrt{24+\cos^2\theta}\right)^2\sin 2\theta$

$=\left(\cos\theta+\sqrt{24+\cos^2\theta}\right)^2\dfrac{\sin 2\theta}{2}$

$S'(\theta)=2\left(\cos\theta+\sqrt{24+\cos^2\theta}\right)\left(-\sin\theta-\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{24+\cos^2\theta}}\right)$

$\times\dfrac{\sin 2\theta}{2}+\left(\cos\theta+\sqrt{24+\cos^2\theta}\right)^2\cos 2\theta$

$\therefore\ -7\times S'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=-7\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{24+\dfrac{1}{2}}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{24+\frac{1}{2}}}\right)$

$=-7\times 4\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{4}{7}\sqrt{2}\right)$

$=32$

13. ③

양의 실수 t와 상수 $k(k>0)$에 대하여

$p(x)=(ax+b)e^{x-k}$, $q(x)=tx$라 하면

$p'(x)=ae^{x-k}+(ax+b)e^{x-k}=(ax+a+b)e^{x-k}$

$q'(x)=t$

두 곡선이 점 $(t,\ t^2)$에서 접하므로

$p(t)=q(t)$에서 $(at+b)e^{t-k}=t^2$ …… ㉠

$p'(t)=q'(t)$에서 $(at+a+b)e^{t-k}=t$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면 $ae^{t-k}=t-t^2$

이때 $a=f(t)$이므로

$f(t)e^{t-k}=t-t^2$

$\therefore\ f(t)=(t-t^2)e^{k-t}$

이 식에 $t=k$를 대입하면 $f(k)=-6$에서

$-6=k-k^2$, $k^2-k-6=0$

$(k-3)(k+2)=0$

$\therefore\ k=3$

$k=3$과 $b=g(t)$를 ㉠에 대입하면

$\{f(t)t+g(t)\}e^{t-3}=t^2$

$\{(t-t^2)te^{3-t}+g(t)\}e^{t-3}=t^2$

$(t^2-t^3)+g(t)e^{t-3}=t^2$, $g(t)=t^3e^{3-t}$

$\therefore\ g'(t)=3t^2e^{3-t}-t^3e^{3-t}=t^2(3-t)e^{3-t}$

$\therefore\ g'(3)=0$

14. 3

점 $(t,0)$과 점 $(x,f(x))$사이의 거리가 최소일 때, 두점 $(t,0)$, $(x,f(x))$를 지나는 직선과 점 $(x,f(x))$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선은 서로 수직이다. 이때 $x=s$이므로

$\dfrac{f(s)}{s-t}\times f'(s)=-1$, $t=s+f(s)\times f'(s)$ … ㉠

$h(1)=a$로 놓으면 $g(a)=1$이고, $h'(1)=\dfrac{1}{g'(a)}$이다

$t=a$일 때, $s=b$라 하면 $g(a)=f(b)=1$에서

$e^b+b=1$, $b=0$

㉠에서 $a=0+f(0)\times f'(0)=2$ 이다.

㉠의 양변을 s에 대하여 미분하면

$\dfrac{dt}{ds}=1+f'(s)\times f'(s)+f(s)\times f''(s)$

$=1+(e^s+1)^2+(e^s+s)e^s$

이므로 $t=2$, $s=0$일 때 $\dfrac{dt}{ds}=6$이다.

$g(t)=f(s)$ 의 양변을 s에 대하여 미분하면

$g'(t)\times\dfrac{dt}{ds}=f'(s)$ 이므로

$g'(2)\times 6=f'(0)$, $g'(2)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ h'(1)=\dfrac{1}{g'(2)}=3$

15. **정답** 25

$f(x)=e^x+x$에서 $f'(x)=e^x+1>1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면

$\tan\theta_1=f'(t)=e^t+1$, $\dfrac{\pi}{4}<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}$

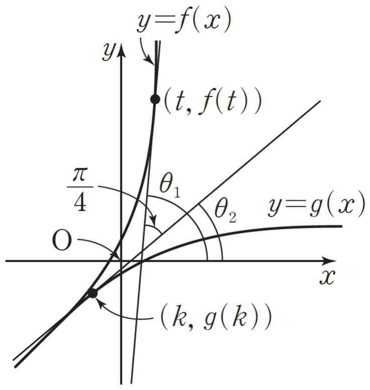
함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(k,\ g(k))$에서의 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면

$\tan\theta_2=g'(k)$, $0<\theta_2<\dfrac{\pi}{4}$

이때 $0<\theta_2<\dfrac{\pi}{4}<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\theta_2=\theta_1-\dfrac{\pi}{4}$

$g'(k)=\tan\theta_2=\tan\left(\theta_1-\frac{\pi}{4}\right)$



$$=\frac{\tan\theta_1-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta_1\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\tan\theta_1-1}{1+\tan\theta_1}$$

$$=\frac{(e^t+1)-1}{1+(e^t+1)}=\frac{e^t}{e^t+2}$$

$f'(g(k))\times g'(k)=1$ 이므로

$$f'(g(k))=\frac{1}{g'(k)}=\frac{e^t+2}{e^t}=\frac{2}{e^t}+1$$

$$e^{g(k)}+1=\frac{2}{e^t}+1,\ e^{g(k)}=\frac{2}{e^t}$$

$$g(k)=\ln\frac{2}{e^t}=\ln2-\ln e^t=-t+\ln2$$

즉, $k=f(-t+\ln2)$ 이므로 $h(t)=f(-t+\ln2)$

$h'(t)=f'(-t+\ln2)\times(-t+\ln2)'$

$=-f'(-t+\ln2)$

따라서

$$h'(\ln8)=-f'(-\ln8+\ln2)=-f'\left(\ln\frac{1}{4}\right)$$

$$=-\left(e^{\ln\frac{1}{4}}+1\right)=-\left(\frac{1}{4}+1\right)=-\frac{5}{4}$$

이므로

$$16\times\{h'(\ln8)\}^2=16\times\left(-\frac{5}{4}\right)^2=25$$

16. 답. ①

$f(x)=\ln(1+e^x)-tx$ 에서 $f'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-t$

$f'(x)=0$ 에서 $\dfrac{e^x}{1+e^x}=t$

$e^x=\dfrac{t}{1-t}$ 이고 $0<t<1$ 이므로 $x=\ln\dfrac{t}{1-t}$

이때 $f''(x)=\dfrac{e^x(1+e^x)-e^x\times e^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ 에서

$$f''\left(\ln\frac{t}{1-t}\right)=\frac{\frac{t}{1-t}}{\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^2}=t(1-t)>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\ln\dfrac{t}{1-t}$ 에서 극솟값 $f\left(\ln\dfrac{t}{1-t}\right)$를 갖는다.

$$g(t)=f\left(\ln\frac{t}{1-t}\right)$$

$$=\ln\left(1+\frac{t}{1-t}\right)-t\ln\frac{t}{1-t}$$

$$=\ln\frac{1}{1-t}-t\ln\frac{t}{1-t}$$

$$=-\ln(1-t)-t\{\ln t-\ln(1-t)\}$$

$$=(t-1)\ln(1-t)-t\ln t$$

에서

$$g'(t)=\ln(1-t)+(t-1)\times\frac{-1}{1-t}-\left(\ln t+t\times\frac{1}{t}\right)$$

$$=\ln(1-t)+1-(\ln t+1)$$

$$=\ln(1-t)-\ln t$$

$g'(t)=0$ 에서 $\ln(1-t)=\ln t$, $t=\dfrac{1}{2}$

$0<t<1$ 에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

이때 함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{1}{2}$ 에서 극대인 동시에 최대이므로 함수 $g(t)$의 최댓값은

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\ln2$$

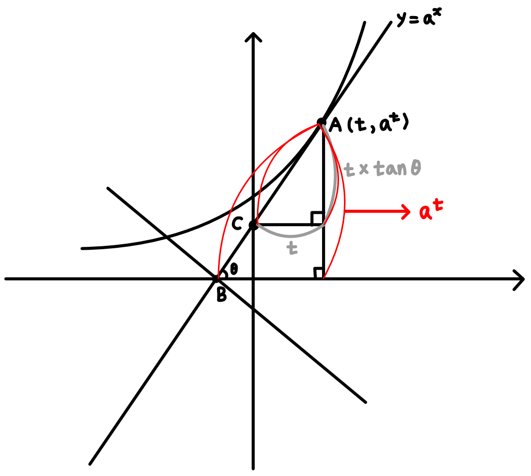
TH①. 초월함수 Graph (3점)

2025학년도 6월 평가원모의고사

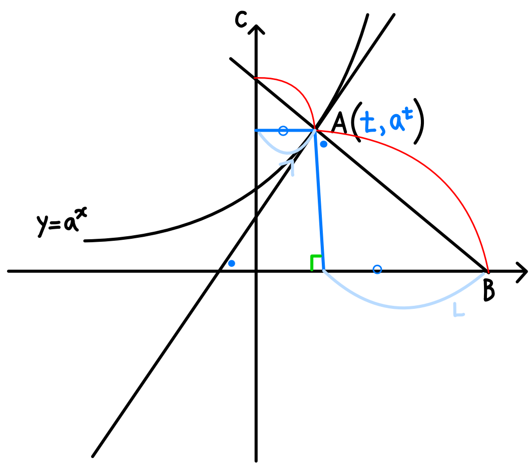
2025 Trend

1. 상수 a $(a>1)$과 실수 t $(t>0)$에 대하여 곡선 $y=a^x$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\ a^t)$에서의 접선을 l이라 하자. 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B, y축과 만나는 점을 C라 하자. $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값이 $t=1$에서 최대일 때, a의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{e}$ ③ 2
④ $\sqrt{2e}$ ⑤ e



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{t\,\cancel{\tan\theta}}{a^t} \quad a^t \times \ln a$$



$t\ \dfrac{\overline{AC}}{\cancel{\overline{AB}}}$ 가 $t=1$ 최대
$\ln a \times a^t$

$$\frac{1}{\ln a}\times t\times a^{-2t} \xrightarrow{\text{미분}} a^{-2t} + -2\times \ln a \times a^{-2t} \times t$$

$\hookrightarrow 1-2\ln a\times t=0$

2024년도 10월 교육청모의고사

2025 Trend

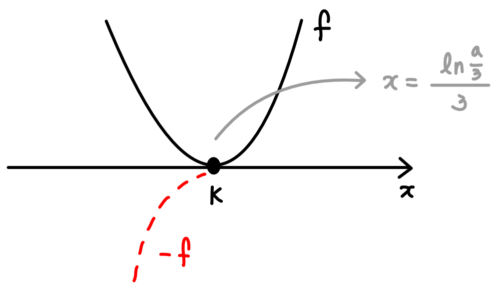
2. 함수 $f(x)=e^{3x}-ax$ (a는 상수)와 상수 k에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq k) \\ -f(x) & (x<k) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 가질 때, $a\times k$의 값은?

① e ② $e^{\frac{3}{2}}$ ③ e^2
④ $e^{\frac{5}{2}}$ ⑤ e^3

$f'(x) = 3e^{3x} - a = 0$



TH②. 초월함수 Graph (4점)

2025학년도 6월 평가원모의고사

2025 Trend

3. 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln\left(1+x^2\right)+a \ (a\text{는 상수})$$

와 두 양수 b, c에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq b) \\ -f(x-c) & (x<b) \end{cases}$$

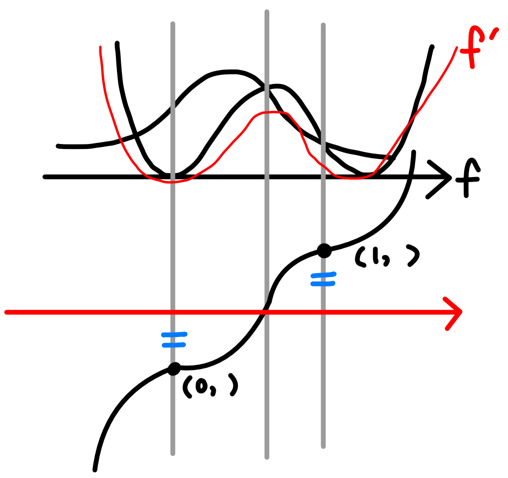
는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $a+b+c=p+q\ln 2$일 때, $30(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

$$f'(x)=x^2-2x+\frac{2x}{1+x^2}=0$$

통분

$$\frac{x^2\cancel{-2x}+x^4-2x^3\cancel{+2x}}{1+x^2}$$

$$\frac{x^2(x-1)^2}{1+x^2}$$



$b=1$, $f(0)+f(1)=2$

$c=1$

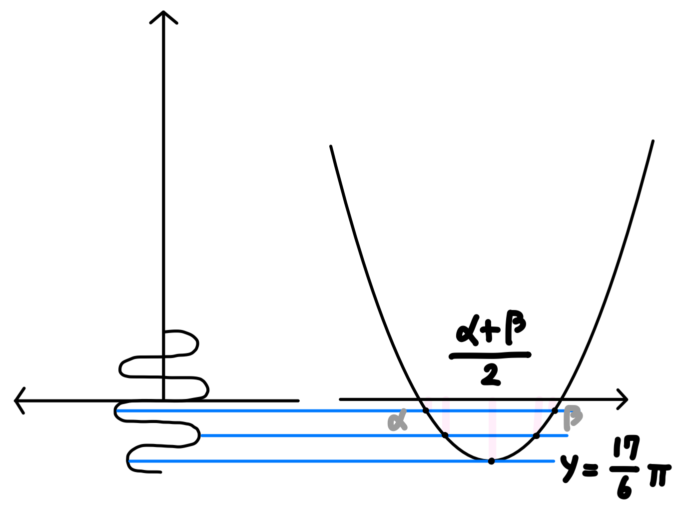
2025학년도 사관학교

4. 두 실수 a, b에 대하여 x에 대한 방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 하자. $(\alpha-\beta)^2=\frac{34}{3}\pi$일 때, 함수

$$f(x)=\sin\left(x^2+ax+b\right)$$

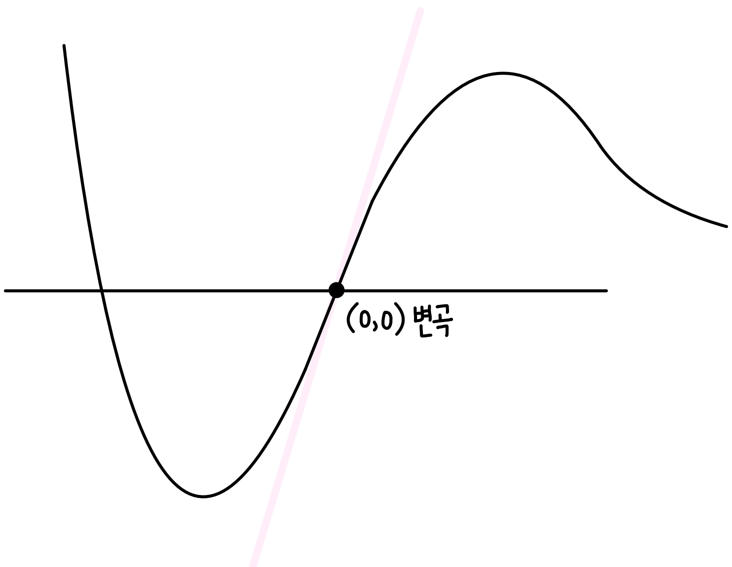
가 $x=c$에서 극값을 갖도록 하는 c의 값 중에서 열린구간 (α, β)에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 c_1, c_2, $\cdots$, c_n (n은 자연수)라 하자. $(1-n)\times\sum_{k=1}^{n} f(c_k)$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta$)

$f(x)=\sin x \circ (x^2+ax+b)$



5. 두 상수 a $(a>0)$, b에 대하여 함수 $f(x)=(ax^2+bx)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $60\times(a+b)$의 값을 구하시오.

> (가) $\{x\,|\,f(x)=f'(t)\times x\}=\{0\}$ 을 만족시키는 실수 t의 개수가 1이다.
>
> (나) $f(2)=2e^{-2}$



$y=f'(t)x$

값 1개

$t=0$

(1) $f''(0)=0$

(2) $f(2)=2e^{-2}$

6. 두 정수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.
>
> (나) 함수 $|f(x)|$가 $x=k$에서 극대 또는 극소인 모든 k의 값의 합은 3이다.

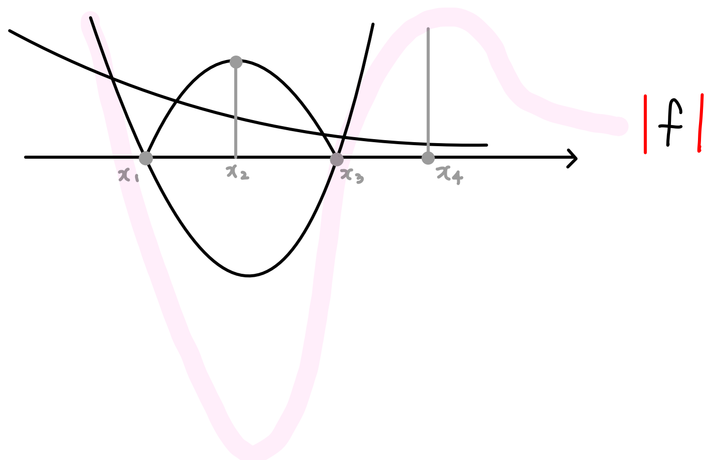
$f(10)=pe^{-10}$일 때, p의 값을 구하시오. [4점]

$f'(x)=(2x+a-x^2-ax-b)e^{-x}$

$=0$

해 x_2, x_4

$D>0$



$f(x)=(\underline{x^2+ax+b})e^{-x}$

$=0$

해 : x_1, x_3

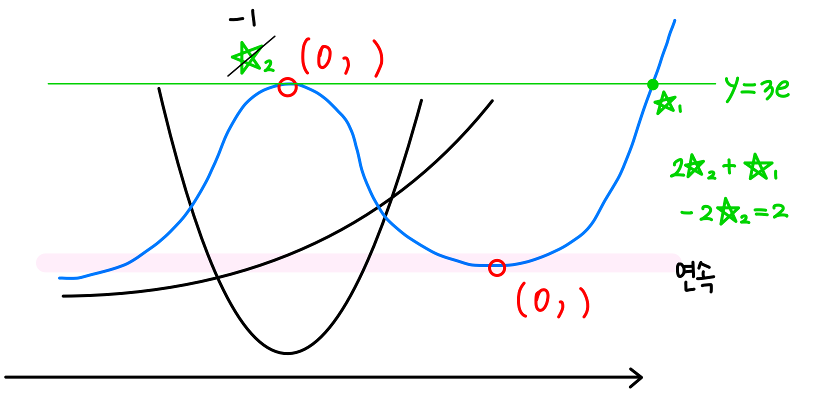
7. 최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=e^{x}f(x)$$

이다. 양수 k에 대하여 집합 $\{x \mid g(x)=k,\ x$는 실수$\}$의 모든 원소의 합을 $h(k)$라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수는 1이다.
(나) $\lim_{k\to 3e+} h(k) - \lim_{k\to 3e-} h(k) = 2$

$g(-6)\times g(2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to -\infty} x^{2}e^{x}=0$) [4점]



$y=f(x)e^{x}$

$y'=(f'(x)+f(x))e^{x}$

(나) $\lim_{k\to 3e+} h(k) - \lim_{k\to 3e-} h(k) = 2$

$B \qquad 2\alpha+B$

$\alpha=-1$

$h(k'+)=h'(k'-)$

$2B'+\alpha' \qquad \alpha'$

$B'=0$

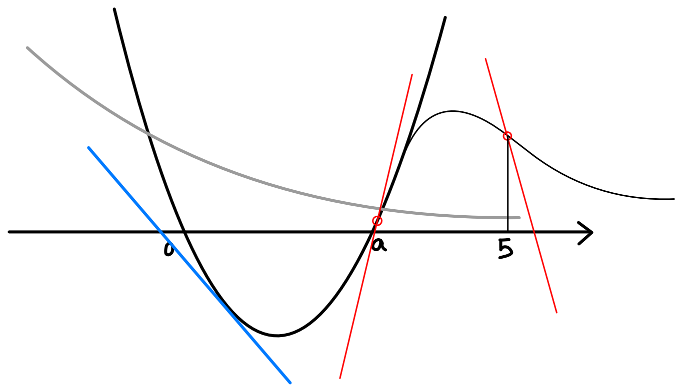
8. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^{2}-ax}{e^{x}}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(5)+\lim_{t\to 5} g(t)=5$일 때, $\lim_{t\to k-} g(t) \neq \lim_{t\to k+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$f''(5)=a$

$f'(x)=0$ 해가 K

9. 최고차항의 계수가 -2 인 이차함수 $f(x)$ 와 두 실수 $a\ (a>0)$, b 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+1)}{x} & (x<0) \\ f(x)e^{x-a}+b & (x \geqq 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=2$ 이고 $g'(a)=-2$ 이다.

(나) $s<0\leqq t$ 이면 $\dfrac{g(t)-g(s)}{t-s}\leqq -2$ 이다.

$a-b$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

10. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

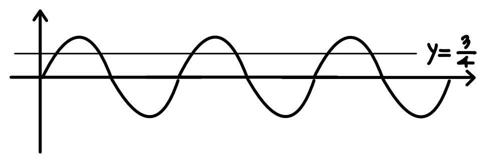
$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

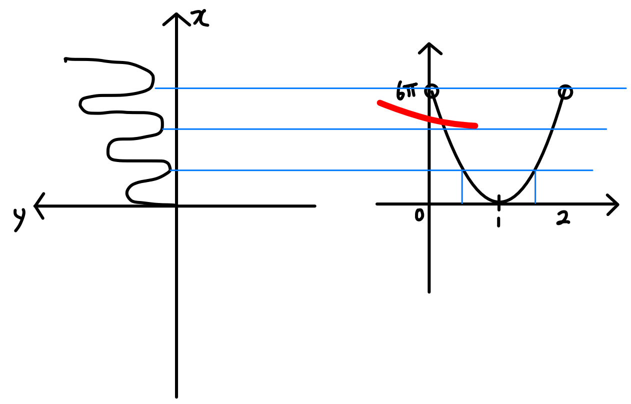
라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

$g(x) = (3x+4\cos x)\circ f(x)$

↳ $3-4\sin x=0$



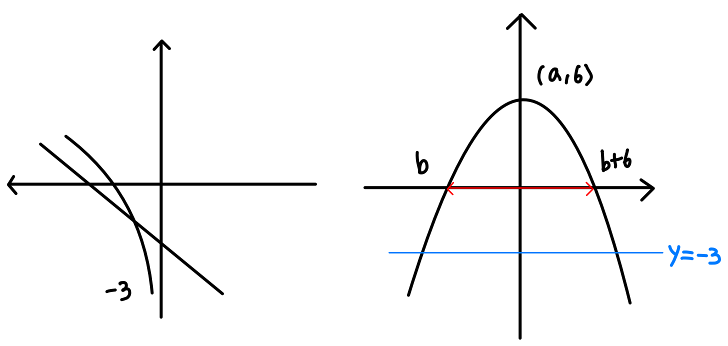


11. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
> (나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]

$(x+2)e^x \circ f(x)$ 선대칭 $x=a$



$f(x)-(-3)=(x-b)(x-(b+6))$

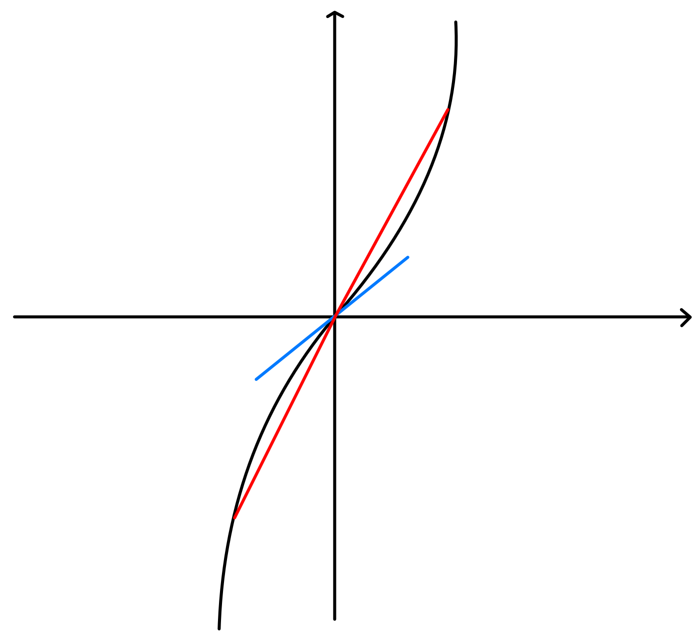
연계 가능

12. 자연수 n과 실수 k에 대하여 곡선

$f(x)=$ $y=\ln(n+x)-\ln(n-x)$

가 직선 $y=kx$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n=16$이 되도록 하는 모든 k의 값의 범위가 $p<k\leq q$일 때, $70pq$의 값을 구하시오.

$y=\ln(n+x)-\ln(n-x)$

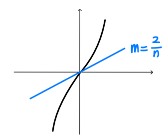


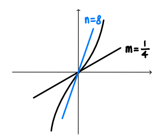
$\sum_{1}^{10} a_n=16$

3×3개 $+1\times 7$개

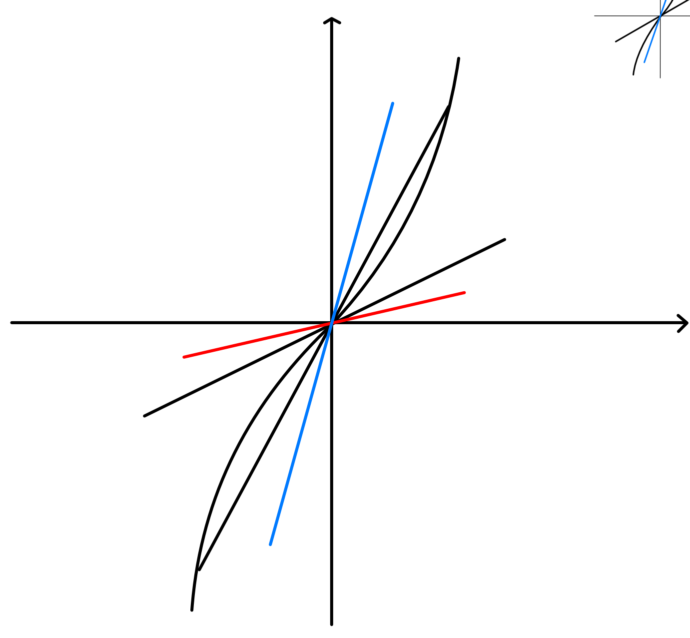
① $\frac{2}{n}<k \to 3$개

② $\frac{2}{n}\geq k \to 1$개





$f'(x_0)=\frac{1}{n+x_0}+\frac{1}{n-x_0}=\frac{2}{n}$

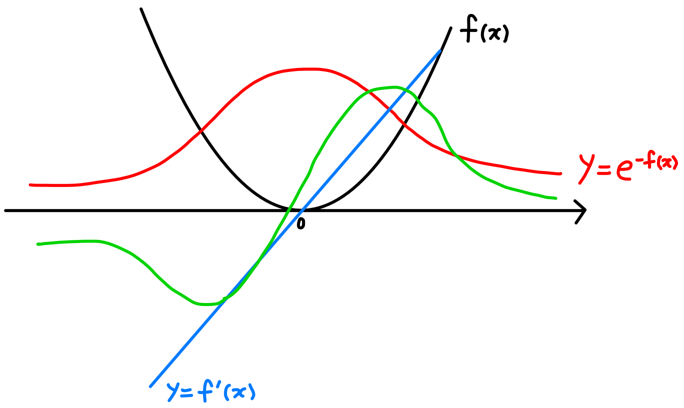


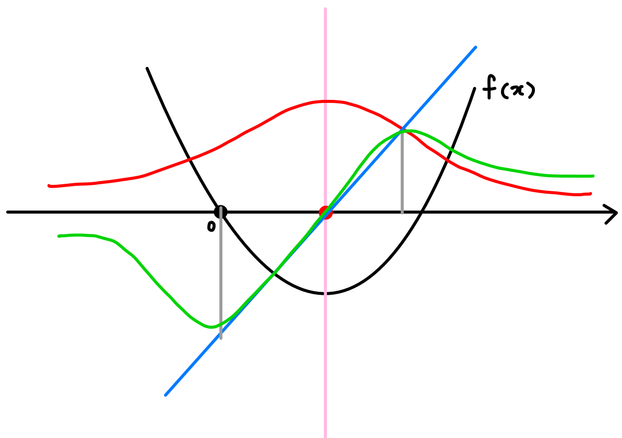
13. $f(0)=0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

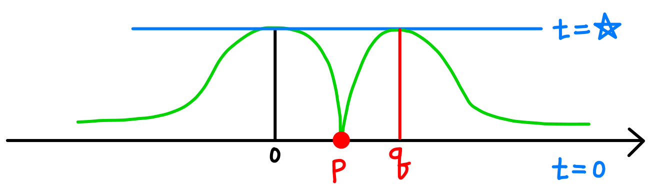
$$g(x)=f'(x)e^{-f(x)}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0$)

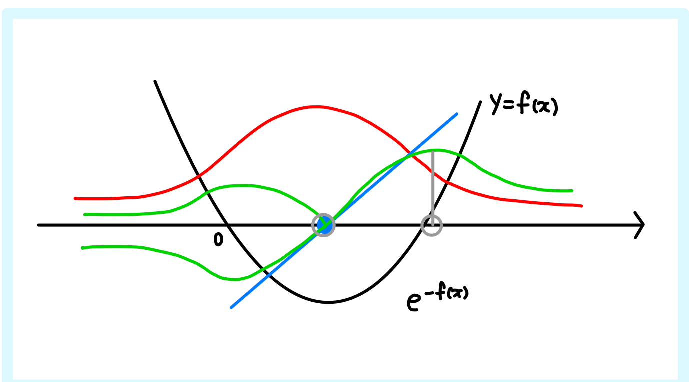
> (가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.
> (나) 실수 t에 대하여 방정식 $|g(x)|=t$의 서로 다른 양의 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, $\lim_{t\to g(k)+} h(t)\neq \lim_{t\to g(k)-} h(t)$인 모든 양수 k의 값의 합은 30이다.







3p=3, p=1



TRY! 2024년 수능완성

14. 함수 $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(k)$라 할 때, 정수 a에 대하여 $\lim_{k\to a-} h(k)+\lim_{k\to a+} h(k)$의 최댓값은 M이다. $h(1)+M$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 2<e<3\text{이고, } \lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0\text{이다.}\right)$

15. 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선이 원점을 지난다.
> (나) 점 $(2,\ g(2))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

TRY! 2024년 수능완성

16. 최고차항의 계수가 1이고 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=(1+\ln 3)f(x)-f(x)\ln f(x)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.
> (나) 방정식 $g'(\alpha)=0$을 만족시키는 모든 실수 α의 값의 곱은 24이다.

$f(10)$의 값을 구하시오. [4점]

17. 함수

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{e^x}$$

이 있다. 실수 t에 대하여 함수 $f(|x|+t)$가 $x=a$에서 극값을 갖는 모든 실수 a의 개수를 $g(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(0)+h(4)$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\right)$ [4점]

TRY! 2024년 수능완성

18. $0\le x<2\pi$에서 정의된 함수

$$f(x)=\sqrt{2}\cos x\times e^{\sqrt{2}\sin x}$$

이 있다. 함수 $f(x)$와 실수 k에 대하여 방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(k)$라 할 때, 두 집합 A, B는 다음과 같다.

$A=\{g(k)\,|\,k\text{는 실수}\}$

$B=\{a\,|\,\text{함수 } g(k)\text{는 } k=a\text{에서 불연속이다.}\}$

$10\times n(A)+n(B)$의 값을 구하시오. [4점]

1. [정답] ②

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 미적분 27 [3.00점]

[해설]
함수 $y=a^x$ 을 x 에 대하여 미분하면

$$y=a^x \ln a$$

점 $\mathrm{A}(t,\, a^t)$에서의 미분계수는 $a^t \ln a$이므로 점 A 를 지나고 점 A 에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{a^t \ln a}(x-t)+a^t \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠과 x 축과 교점 B는

$$\frac{1}{a^t \ln a}(x-t)=a^t, \qquad x=t+a^{2t}\ln a$$

$$\therefore\ \mathrm{B}\left(t+a^{2t}\ln a,\, 0\right)$$

점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 A'라 하면

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\overline{\mathrm{A}'\mathrm{O}}}{\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}}=\frac{t}{a^{2t}\ln a} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 $f(t)=\dfrac{t}{a^{2t}\ln a}$라 하면

$$f'(t)=\frac{1}{\ln a}\left(a^{-2t}+t\times a^{-2t}\times(-2)\times \ln a\right)$$

$$=a^{-2t}\left(\frac{1}{\ln a}-2t\right)$$

함수 $f(t)$ 는 $t=\dfrac{1}{2\ln a}$ 에서 극댓값을 가지고 이 값이 최댓값이므로

$$\frac{1}{2\ln a}=1, \qquad \ln a=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ a=\sqrt{e}$$

2. [정답] ①

[해설]
$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 가지려면 $g(x)$는 일대일대응이어야 한다.

$f'(x)=3e^{3x}-a,\ g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x>k) \\ -f'(x) & (x<k) \end{cases}$에서

$a\leq\ 0$이면 모든 실수 x에 대해 $f'(x)>0$이다.

$x>k$일 때 $g'(x)>0$이고 $x<k$일 때 $g'(x)<0$이므로 $g(x)$는 역함수를 갖지 않는다.

$a>0$이면 $f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{3}ln\dfrac{a}{3}$이고

$x<\dfrac{1}{3}ln\dfrac{a}{3}$이면 $f'(x)<0$,

$x>\dfrac{1}{3}ln\dfrac{a}{3}$이면 $f'(x)>0$이므로 $k=\dfrac{1}{3}ln\dfrac{a}{3}$

$g(x)$가 $x=k$에서 연속이므로

$f(k)=-f(k)$, $f(k)=0$

$f(k)=f\left(\dfrac{1}{3}ln\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{a}{3}-\dfrac{a}{3}ln\dfrac{a}{3}=0$, $a=3e$, $k=\dfrac{1}{3}$

따라서 $a\times k=e$

3. [정답] 55

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 미적분 29 [4.00점]

[해설]
함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln\left(1+x^2\right)+a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

를 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x^2-2x+\frac{2x}{1+x^2}$$

$$=\frac{x^2(x-1)^2}{x^2+1} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이므로 $f'(x)=0$ 에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq\ b) \\ -f(x-c) & (x<b) \end{cases}$$

에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x>b) \\ -f'(x-c) & (x<b) \end{cases}$$

㉡에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq\ 0$이므로

함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능하려면 $x=b$에서 함수 $f(x)$와 $-f(x-c)$가 만나야 하고, 그 점에서 미분계수가 모두 0으로 같아야 한다.

$f'(b)=0$에서 $b>0$이므로 $\quad b=1 \qquad \cdots\cdots ㉢$

$-f'(1-c)=0$이고 $c>0$이므로 $\quad c=1 \qquad \cdots\cdots ㉣$

함수 $g(x)$는 $x=b$에서 연속이므로

$$f(b)=-f(b-c), \qquad f(1)=-f(0)$$

$$\frac{1}{3}-1+\ln 2+a=-a, \qquad a=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 2 \quad \cdots\cdots ㉤$$

따라서 ㉢, ㉣, ㉤에서

$$a+b+c=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}ln2$$

이므로 $\quad p=\dfrac{7}{3},\ q=-\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ 30(p+q)=30\times\frac{11}{6}$$

$$=55$$

4. [정답] 15

5. [정답] 40

[해설]
$f'(x)=\left\{-ax^2+(2a-b)x+b\right\}e^{-x}$

$f''(x)=\left\{ax^2-(4a-b)x+2a-2b\right\}e^{-x}$

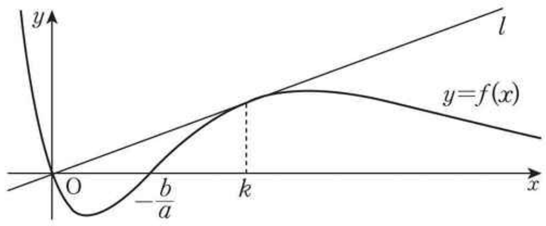
점 $(0,\, 0)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 그은 접선 중 기울기가 $f'(0)$이 아닌 접선이 존재할 때 그 접선을 l이라 하자. 접선 l의 접점을 $(k,\, f(k))$라 하면 $k\neq\ 0$이다.

$$\frac{f(k)}{k}=f'(k)$$

$$(ak+b)e^{-k}=\left(-ak^2+(2a-b)k+b\right)e^{-k}$$

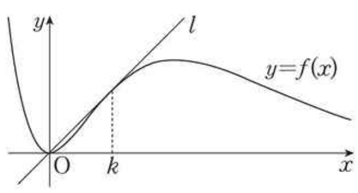
$k = -\dfrac{b}{a} + 1$ 이고, $f'(k) = ae^{-k}$, $f''(k) = -ake^{-k}$

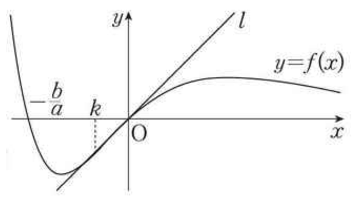
$\dfrac{b}{a} < 0$ 일 때, 직선 l 과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같고 $f'(t) > f'(k)$ 인 t 가 존재하면 방정식 $f(x) = f'(t) \times x$ 의 실근은 0 뿐이다.



$f''(0) = 2a - 2b$ 에서 $f''(0) \times f''(k) < 0$ 이므로 $0 < \alpha < k$ 이고 $f''(\alpha) = 0$ 인 α 가 존재하고, $\alpha < t < k$ 인 임의의 t 에 대하여 $f''(t) < 0$ 이다. 이때, $\alpha < t_1 < k$, $\alpha < t_2 < k$ 인 두 실수 t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ 가 존재하고 $f'(t_1) > f'(k)$, $f'(t_2) > f'(k)$ 이다.
t 가 t_1 또는 t_2 일 때, $\{x \mid f(x) = f'(t) \times x\} = \{0\}$ 이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

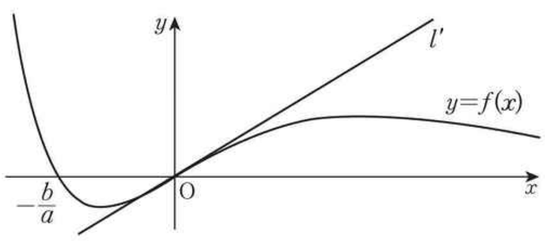
$\dfrac{b}{a} \geq 0$, $\dfrac{b}{a} \neq 1$ 일 때, 직선 l 과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같고 $f'(t) > f'(k)$ 인 t 가 존재하면 방정식 $f(x) = f'(t) \times x$ 의 실근은 0 뿐이다.





$f''(0) \times f''(k) < 0$ 이므로 $\dfrac{b}{a} < 0$ 일 때와 마찬가지로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

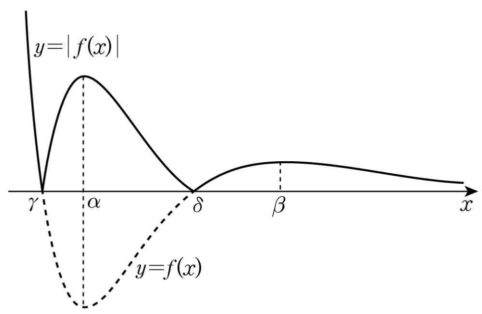
$\dfrac{b}{a} = 1$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선을 l' 이라 하면 직선 l' 과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$t = 0$ 일 때, 방정식 $f(x) = f'(t) \times x$ 에서
$a = b$ 이므로 $a(x^2 + x)e^{-x} = f'(0)x$
$f'(0) = a$ 이므로 $ax(x+1)e^{-x} = ax$
$ax\{(x+1)e^{-x} - 1\} = 0$
$x = 0$ 또는 $(x+1)e^{-x} - 1 = 0$ 이므로
방정식 $f(x) = f'(t) \times x$ 의 실근은 0 뿐이다.
$f''(0) = 0$ 이고 0 이 아닌 모든 실수 t 에 대하여 $f'(t) < f'(0)$ 이다.
따라서 0 이 아닌 모든 실수 t 에 대하여
$\{x \mid f(x) = f'(t) \times x\} \neq \{0\}$ 이므로 조건 (가)를 만족시킨다.
조건 (나)에서 $f(2) = (4a + 2b)e^{-2} = 2e^{-2}$
$2a + b = 1$ 이다. $a = b$ 이므로 $a = b = \dfrac{1}{3}$
따라서 $60 \times (a + b) = 60 \times \dfrac{2}{3} = 40$

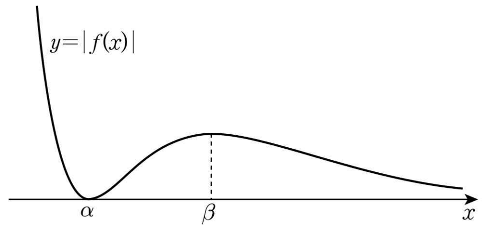
6. 91
[출제의도] 미분법을 활용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

$f'(x) = (2x + a)e^{-x} - (x^2 + ax + b)e^{-x}$
$= -\{x^2 + (a-2)x + b - a\}e^{-x}$
$f'(x) = 0$ 에서 모든 실수 x 에 대하여 $e^{-x} > 0$ 이므로
$x^2 + (a-2)x + b - a = 0$ …… ㉠
조건 (가)에서 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이 두 실근을 α, $\beta(\alpha < \beta)$ 라 하자.
이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1 이라 하면
$D_1 = (a-2)^2 - 4(b-a) = a^2 + 4 - 4b > 0$
$f(x) = 0$ 에서 모든 실수 x 에 대하여 $e^{-x} > 0$ 이므로
$x^2 + ax + b = 0$ …… ㉡
이차방정식 ㉡의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 = a^2 - 4b$
(ⅰ) $D_2 > 0$ 인 경우
함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점의 x 좌표를 γ, $\delta(\gamma < \delta)$ 라 하면 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

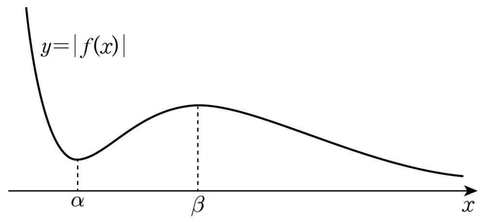
함수 $|f(x)|$ 는 $x = \alpha$, $x = \beta$ 에서 극대이고 $x = \gamma$, $x = \delta$ 에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든 k 의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β 와 이차방정식 ㉡의 서로 다른 두 실근 γ, δ 의 합과 같다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = (2 - a) + (-a) = 3$
$a = -\dfrac{1}{2}$
이때 a 는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $D_2 = 0$ 인 경우
함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하고, 이 접점의 x 좌표는 α 이므로 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

함수 $|f(x)|$ 는 $x = \beta$ 에서 극대이고 $x = \alpha$ 에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든 k 의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β 의 합과 같다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 2 - a = 3$, $a = -1$
$D_2 = (-1)^2 - 4b = 0$, $b = \dfrac{1}{4}$
이때 b 는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅲ) $D_2 < 0$ 인 경우
함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으므로 함수

$y=|f(x)|$ 의 그래프의 개형은 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

함수 $|f(x)|$ 는 $x=\beta$에서 극대이고 $x=\alpha$에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든 k의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2-a=3,\ a=-1$

$D_1=(-1)^2+4-4b>0,\ b<\dfrac{5}{4}$

$D_2=(-1)^2-4b<0,\ b>\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{4}<b<\dfrac{5}{4}$ 이고 b는 정수이므로 $b=1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 정수 a, b의 값이 $a=-1$, $b=1$ 이므로

$f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$

따라서 $f(10)=(10^2-10+1)e^{-10}=91e^{-10}$ 이므로

$p=91$

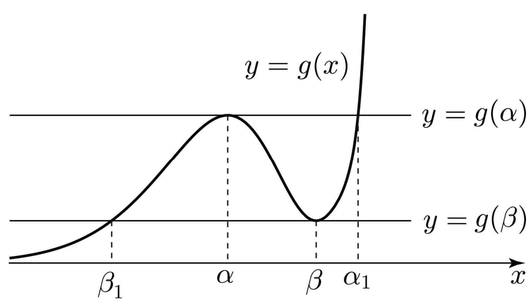
7. 129

[출제의도] 미분법을 활용하여 추론하기

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$g'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}=e^x\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}$

함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않으면 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖는다.



함수 $g(x)$ 가 $x=\alpha$ 에서 극댓값, $x=\beta$ 에서 극솟값을 갖는다고 하면

$g'(x)=e^x\{a(x-\alpha)(x-\beta)\}$

함수 $h(k)$ 는 $k=t$ ($t\neq g(\alpha)$, $t\neq g(\beta)$) 에서

$\lim\limits_{k\to t-}h(k)=\lim\limits_{k\to t+}h(k)=h(t)$

그러므로 함수 $h(k)$ 는

$k=t$ ($t\neq g(\alpha)$, $t\neq g(\beta)$) 에서 연속이다.

조건 (가)에 의하여 함수 $h(k)$ 가 $k=t$ 에서 불연속인 t 의 개수가 1 이므로

함수 $h(k)$ 는 $k=g(\alpha)$ 에서 연속이고 $k=g(\beta)$ 에서 불연속 또는 $k=g(\alpha)$ 에서 불연속이고 $k=g(\beta)$ 에서 연속이다.

(ⅰ) 함수 $h(k)$ 가 $k=g(\alpha)$ 에서 연속이고 $k=g(\beta)$ 에서 불연속인 경우

$\lim\limits_{k\to g(\alpha)-}h(k)=2\alpha+\alpha_1$

$\lim\limits_{k\to g(\alpha)+}h(k)=\alpha_1$

$h(g(\alpha))=\alpha+\alpha_1$ 이므로

$\lim\limits_{k\to g(\alpha)-}h(k)=\lim\limits_{k\to g(\alpha)+}h(k)=h(g(\alpha))$ 에서

$2\alpha+\alpha_1=\alpha_1=\alpha+\alpha_1$

그러므로 $\alpha=0$

함수 $h(k)$ 는 $k=g(\beta)$ 에서 불연속이므로

$\lim\limits_{k\to g(\beta)+}h(k)-\lim\limits_{k\to g(\beta)-}h(k)=2\beta\neq 0$

조건 (나)에 의하여 $\beta=1$, $g(\beta)=3e$

$g'(0)=0$, $g'(1)=0$ 이므로

$g'(x)=e^x\{ax(x-1)\}$

$g(x)=e^x\{a(x^2-3x+3)\}$

$g(1)=3e$ 이므로 $a=3$

최고차항의 계수가 3 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 함수 $h(k)$ 가 $k=g(\alpha)$ 에서 불연속이고 $k=g(\beta)$ 에서 연속인 경우

$\lim\limits_{k\to g(\beta)-}h(k)=\beta_1$

$\lim\limits_{k\to g(\beta)+}h(k)=2\beta+\beta_1$

$h(g(\beta))=\beta+\beta_1$ 이므로

$\lim\limits_{k\to g(\beta)-}h(k)=\lim\limits_{k\to g(\beta)+}h(k)=h(g(\beta))$ 에서

$\beta_1=2\beta+\beta_1=\beta+\beta_1$

그러므로 $\beta=0$

함수 $h(k)$ 는 $k=g(\alpha)$ 에서 불연속이므로

$\lim\limits_{k\to g(\alpha)+}h(k)-\lim\limits_{k\to g(\alpha)-}h(k)=-2\alpha\neq 0$

조건 (나)에 의하여 $\alpha=-1$, $g(\alpha)=3e$

$g'(0)=0$, $g'(-1)=0$ 이므로

$g'(x)=e^x\{ax(x+1)\}$

$g(x)=e^x\{a(x^2-x+1)\}$

$g(-1)=3e$ 이므로 $a=e^2$

$g(x)=e^{x+2}(x^2-x+1)$

따라서 $g(-6)\times g(2)=43e^{-4}\times 3e^4=129$

8. 16

[출제의도] 미분을 이용하여 함수의 그래프를 개형을 그릴 수 있으며 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

$f(x)=\dfrac{x^2-ax}{e^x}=(x^2-ax)e^{-x}$

이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=(2x-a)e^{-x}+(x^2-ax)e^{-x}\times(-1)\\&=e^{-x}\{-x^2+(a+2)x-a\}\\&=-e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a\}\end{aligned}$$

이때, $f'(x)=0$ 에서

$x^2-(a+2)x+a=0$ …… ㉠

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+2)^2-4a=a^2+4>0$

또, ㉠의 서로 다른 두 근은

$x=\dfrac{(a+2)\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$ …… ㉡

이때, $a>0$이므로

$a+2=\sqrt{(a+2)^2}>\sqrt{a^2+4}$

그러므로 두 양의 실근을 갖는다.

㉡의 두 근을 α, β ($0<\alpha<\beta$)라 하면 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

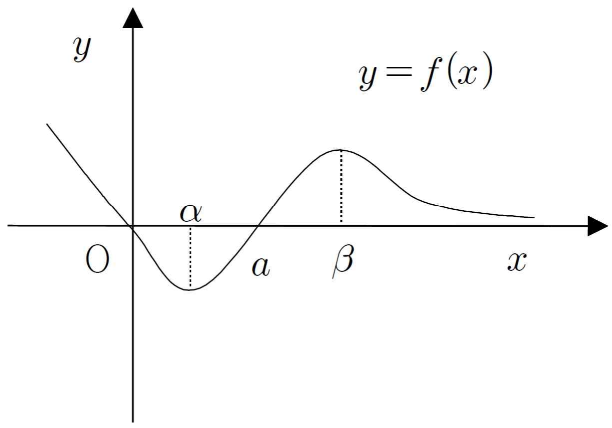
x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

이때,

$f(0)=0$, $f(a)=0$ 이고

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax}{e^x}=0$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



또,

$f''(x)=e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a\}-e^{-x}\{2x-(a+2)\}$

$=e^{-x}\{x^2-(a+4)x+2a+2\}$

이때, $f''(x)=0$에서

$x^2-(a+4)x+2a+2=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+4)^2-4\times1\times(2a+2)=a^2+8>0$

그러므로 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값의 개수는 2이다.

한편, 방정식

$f(x)=f'(x)(x-t)+f(t)$

의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수

$y=f(x)$, $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

의 그래프의 교점의 개수이다. 이때, 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이다.

한편, 함수 $g(x)$가 $t=a$에서 연속이면

$g(a)=\lim_{t\to a}g(t)$ 이므로

$g(a)+\lim_{t\to a}g(t)$ 의 값은 짝수이어야 한다.

그런데

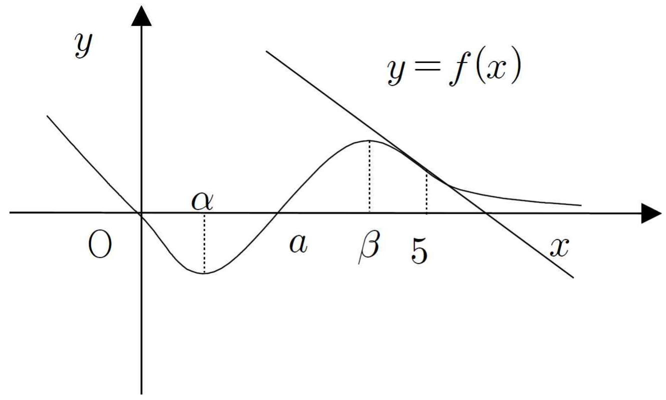
$g(5)+\lim_{t\to 5}g(t)=5$ $\cdots\cdots$ ㉢

이므로 함수 $g(t)$는 $t=5$에서 불연속이다. 함수 $g(t)$가 불연속이 되는 t의 값은 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이거나 변곡점을 갖는 x의 값이다.

한편, 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 m이라 하면 함수 $g(t)$는 $t=m$에서 극한값을 갖지 않는다.

또, 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값을 n이라 하면 함수 $g(t)$는 $t=n$에서 극한값을 갖는다.

그러므로 ㉢을 만족시키는 t의 값은 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값 중 큰 값이다.



즉, 함수 $f(x)$는 $X=5$에서 변곡점을 갖고 이때

$\lim_{t\to5}g(t)=3$, $g(5)=2$

이므로 조건을 만족시킨다.

따라서, $x=5$가 방정식 ㉡의 근이므로 대입하면

$5^2-(a+4)\times5+2a+2=0$

$-3a+7=0$

$a=\frac{7}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉢

한편,

$\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$

를 만족시키는 k의 값은 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이다. ㉠에 ㉢을 대입하면

$x^2-\left(\frac{7}{3}+2\right)x+\frac{7}{3}=0$

$x^2-\frac{13}{3}x+\frac{7}{3}=0$

따라서, 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 근과 계수의 관계를 이용하면 $\frac{13}{3}$이므로

$p+q=3+13=16$

9. 4

(가) $\lim_{x\to0-}\frac{f(x+1)}{x}=2$

$\Rightarrow f(x+1)=-2x^2+2x$

$\Rightarrow f(x)=-2(x-1)^2+2(x-1)=-2(x-1)(x-2)$

$g'(a)=f(a)+f'(a)$

$=-2(a-1)(a-2)-2(2a-3)$

$=-2(a^2-a-1)=-2$

$\Rightarrow a=2$

$g(x)=\begin{cases}-2x+2 & (x<0)\\ -2(x-1)(x-2)e^{x-2}+b & (x\geq 0)\end{cases}$

$b=g(2)=-2 \Rightarrow a-b=4$

10. ②

[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 극소가 되는 x 의 개수를 구할 수 있는가?

$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$ 이므로,

$g'(x)=3f'(x)-4f'(x)\sin f(x)$

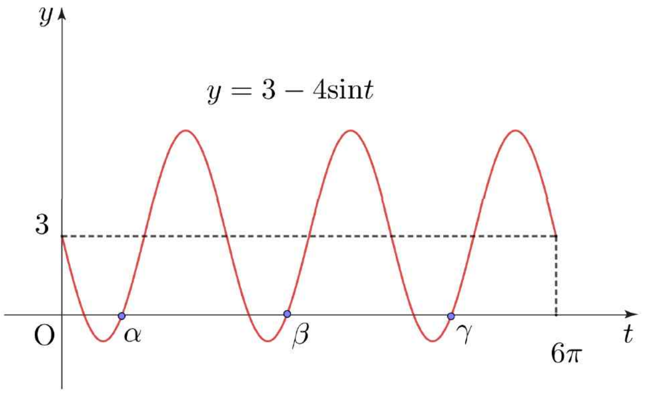
$=f'(x)\{3-4\sin f(x)\}$

$=12\pi(x-1)\{3-4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$

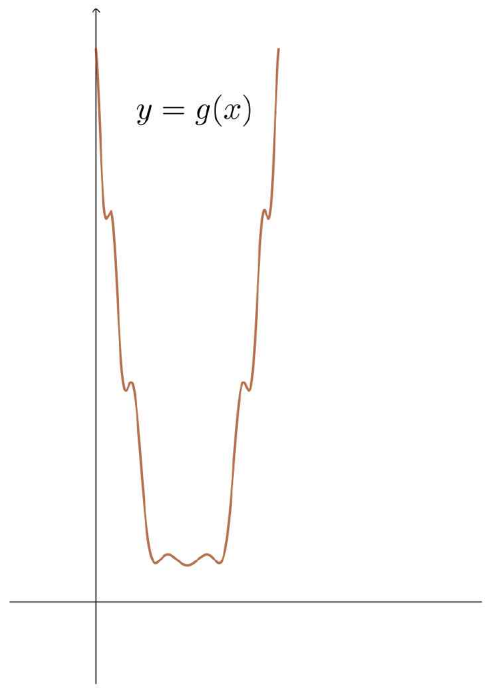
이므로, $g'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $\sin(6\pi(x-1)^2)=\frac{3}{4}$

(i) $x=1$ 일 때,
$x=1$ 일 때, $\sin(6\pi(x-1)^2)=0$ 이므로,
$x=1$ 부근에서 $3-4\sin(6\pi(x-1)^2)>0$ 이다.
이 때, $x-1$ 은 $x=1$ 의 좌우에서 음에서 양으로 변하므로,
$g'(x)=12\pi(x-1)\{3-4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$ 도 $x=1$ 의 좌우에서 음에서 양으로 변한다. 따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이다.
(ii) $1<x<1$ 일 때,
$12\pi(x-1)>0$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 구간 $[1, 2]$ 에서 0 에서 6π 까지 증가한다. 즉, $f(x)=t$ 라 하면 x 의 값이 1 에서 2 까지 증가할 때, t 의 갖은 0 에서 6π 까지 증가한다.
이 때, 함수 $y=3-4\sin t$ 의 그래프는 다음과 같으므로,
$t=\alpha, \beta, \gamma$ 의 좌우에서 $y=3-4\sin t$ 의 값은 음에서 양으로 변한다.



따라서 $f(x)=\alpha, \beta, \gamma$ 인 x 의 좌우에서 $y=3-4\sin f(x)$ 의 값은 음에서 양으로 변하고, 이러한 x 는 세 수 α, β, γ 에 대하여 각각 하나씩 존재한다.
따라서 함수 $g(x)$ 는 $1<x<2$ 에서 극소가 되는 x 의 개수는 3 이다.
(iii) $0<x<1$ 일 때,
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이다.
즉, 모든 실수 x 에 대하여
$f(1-x)=f(1+x)$ 가 성립한다.
이 때, $g(1-x)=3f(1-x)+4\cos f(1-x)$
$=3f(1+x)+4\cos f(1+x)$
$=g(1+x)$
이므로, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프도 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이다.
따라서 (ii)와 같이 $0<x<1$ 에서 함수 $g(x)$ 는 극소가 되는 x 의 개수도 3 이다.
(i), (ii), (iii)에서 구하는 x 의 개수는 $1+3+3=7$ 이다.
[참고]
$0<x<2$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



11. 24
[출제의도] 함수의 극대, 극소 및 함수의 그래프의 개형을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

$g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$ 이므로 $g'(x)=f'(x)\{f(x)+3\}e^{f(x)}$
$g'(x)=0$ 에서 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)+3=0$
$f(x)$ 가 이차함수이므로 조건 (가), (나)에서 의해
$f'(a)=0$, $f(a)=6$
$f(b)+3=0$, $f(b+6)+3=0$ 이어야 한다.
이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 p 라 하면
$f(b)+3=0$, $f(b+6)+3=0$ 이므로
$f(x)+3=p(x-b)(x-b-6)$
즉, $f(x)=p(x-b)(x-b-6)-3$ …… ㉠
이 때, $f'(a)=0$ 이므로 $\frac{b+(b+6)}{2}=a$
$b=a-3$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$f(x)=p(x-a+3)(x-a-3)-3$
이므로
$f(a)=-9p-3=6$ 에서 $p=-1$
방정식 $f(x)=0$ 에서
$-(x-a+3)(x-a-3)-3=0$
$(x-a)^2-6=0$, $x=\pm\sqrt{6}$
따라서
$(\alpha-\beta)^2=\{(a+\sqrt{6})-(a-\sqrt{6})\}^2=24$

12. 답. 5
$f(x)=\ln(n+x)-\ln(n-x)$ 라 하자.
로그의 진수 조건에 의하여 $n+x>0$, $n-x>0$ 이므로
$-n<x<n$
즉, 함수 $f(x)$ 의 정의역은 열린구간 $(-n, n)$ 이다.
$f'(x)=\frac{1}{n+x}-\frac{-1}{n-x}=\frac{2n}{n^2-x^2}$
이므로 $-n<x<n$ 에서 $f'(x)>0$

$f''(x)=\frac{2n\times(-2x)}{(n^2-x^2)^2}=\frac{4nx}{(n^2-x^2)^2}$

이므로 $f''(x)=-\frac{2n\times(-2x)}{(n^2-x^2)^2}=\frac{4nx}{(n^2-x^2)^2}$

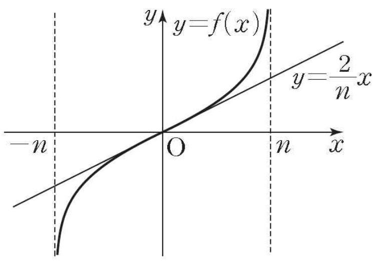
이므로 $f''(x)=0$에서 $x=0$

$-n<x<n$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$(-n)$	$\cdots$	0	$\cdots$	(n)
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↗	

$-n<x<n$인 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

또한 $\lim_{x\to -n+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to n-} f(x)=\infty$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $f'(0)=\frac{2}{n}$이므로 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=\frac{2}{n}x$이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 a_n이므로

$k\le\frac{2}{n}$이면 $a_n=1$, $k>\frac{2}{n}$이면 $a_n=3$ ⋯⋯ ㉠

$a_n=1$인 자연수 n의 최댓값을 m이라 하면

$$a_n=\begin{cases}1 & (1\le n\le m)\\ 3 & (n>m)\end{cases}$$

$m\ge 10$이면 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}1=10$이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $m<10$이다.

이때

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}a_n&=\sum_{n=1}^{m}a_n+\sum_{n=m+1}^{10}a_n\\&=\sum_{n=1}^{m}1+\sum_{n=m+1}^{10}3\\&=m+3(10-m)\\&=30-2m\end{aligned}$$

이므로 $30-2m=16$에서 $m=7$

즉, $a_7=1$, $a_8=3$이므로 ㉠에 의하여

$k\le\frac{2}{7}$, $k>\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

그러므로 구하는 모든 실수 k의 값의 범위는

$\frac{1}{4}<k\le\frac{2}{7}$

따라서 $p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{2}{7}$이므로

$70pq=70\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}=5$

13. 답. 4

함수 $f(x)$는 $f(0)=0$인 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$g(x)=f'(x)e^{-f(x)}=(2ax+b)e^{-f(x)}$에서

$$\begin{aligned}g'(x)&=2ae^{-f(x)}-(2ax+b)^2e^{-f(x)}\\&=\{2a-(2ax+b)^2\}e^{-f(x)}\end{aligned}\quad\cdots\cdots ㉠$$

조건 (가)에서 $g'(0)=0$이므로

$2a-b^2=0$, $b^2=2a$ ⋯⋯ ㉡

$a\neq 0$이므로 $b\neq 0$, $a=\frac{b^2}{2}>0$이고, ㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}g'(x)&=\{b^2-(b^2x+b)^2\}e^{-f(x)}\\&=b^2\{1-(bx+1)^2\}e^{-f(x)}\\&=b^2(-b^2x^2-2bx)e^{-f(x)}\\&=-b^4x\left(x+\frac{2}{b}\right)e^{-f(x)}\end{aligned}$$

$g'(x)=0$에서 $x=0$또는 $x=-\frac{2}{b}$

(ⅰ) $b>0$인 경우

$b>0$에서 $-\frac{2}{b}<0$이고, 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{b}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(x)=\frac{b^2}{2}x^2+bx$, $f'(x)=b^2x+b$에서

$f\left(-\frac{2}{b}\right)=\frac{b^2}{2}\times\left(-\frac{2}{b}\right)^2+b\times\left(-\frac{2}{b}\right)=0$,

$f'\left(-\frac{2}{b}\right)=b^2\times\left(-\frac{2}{b}\right)+b=-b$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{2}{b}$에서 극솟값

$g\left(-\frac{2}{b}\right)=f'\left(-\frac{2}{b}\right)e^{-f\left(-\frac{2}{b}\right)}=-b$를 갖고,

$f(0)=0$, $f'(0)=b$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $g(0)=f'(0)e^{-f(0)}=b$를 갖는다.

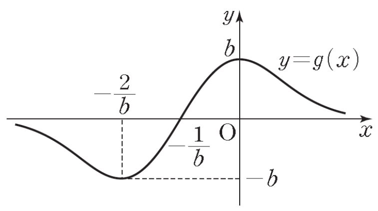
함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

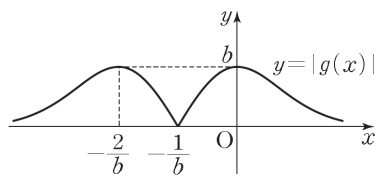
$g(x)=f'(x)e^{-f(x)}=0$에서

$f'(x)=b^2x+b=0$, $x=-\frac{1}{b}$

즉, $g\left(-\frac{1}{b}\right)=0$이고, $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 다음과

같다.





이때 함수 $h(t)$는 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점 중 x좌표가 양수인 것의 개수이므로

$$h(t)=\begin{cases}0\ (t\leq 0)\\ 1\ (0<t<b)\\ 0\ (t\geq b)\end{cases}$$

임의의 양수 k에 대하여 $0<g(k)<b$이므로

$\lim\limits_{t\to g(k)+} h(t)=\lim\limits_{t\to g(k)-} h(t)=1$이다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $b<0$인 경우

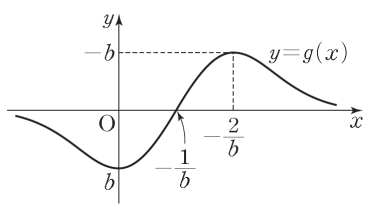
$b<0$에서 $-\dfrac{2}{b}>0$이고, 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

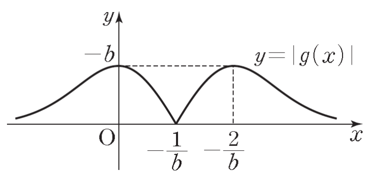
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{b}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $g(0)=b$를 갖고, $x=-\dfrac{2}{b}$에서

극댓값 $g\left(-\dfrac{2}{b}\right)=-b$를 갖는다.

또한 $g\left(-\dfrac{1}{b}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

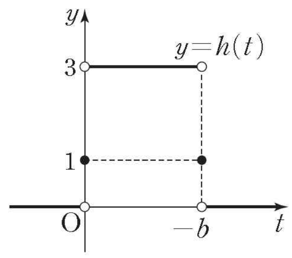




이때 함수 $h(t)$는 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점 중 x좌표가 양수인 것의 개수이므로

$$h(t)=\begin{cases}0\ (t<0)\\ 1\ (t=0)\\ 3\ (0<t<-b)\\ 1\ (t=-b)\\ 0\ (t>-b)\end{cases}$$

이고 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.



임의의 양수 k에 대하여 $b<g(k)\leq-b$이므로

$\lim\limits_{t\to g(k)+} h(t)\neq\lim\limits_{t\to g(k)-} h(t)$를 만족시키는 $g(k)$의 값은 0, $-b$이다.

$g(k)=0$에서 양수 k의 값은 $-\dfrac{1}{b}$이고,

$g(k)=-b$에서 양수 k의 값은 $-\dfrac{2}{b}$이다.

$k\neq-\dfrac{1}{b}$, $k\neq-\dfrac{2}{b}$인 모든 양수 k에 대하여

$0<|g(k)|<-b$이므로 $\lim\limits_{t\to g(k)+} h(t)=\lim\limits_{t\to g(k)-} h(t)$이다.

그러므로 $-\dfrac{1}{b}+\left(-\dfrac{2}{b}\right)=3$, 즉 $b=-1$일 때 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $b=-1$이고 이를 ㉡에 대입하면 $a=\dfrac{1}{2}$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x$

따라서 $f(4)=\dfrac{1}{2}\times4^2-4=4$

14. **정답** 9

$f(x)=(x+1)^2e^{-x}$에서

$f'(x)=2(x+1)e^{-x}-(x+1)^2e^{-x}$

$=(-x^2+1)e^{-x}$

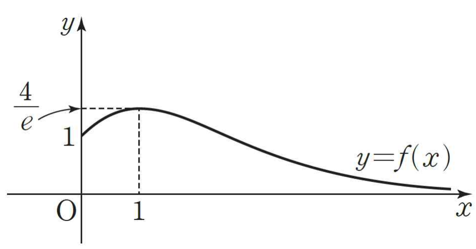
$=-(x+1)(x-1)e^{-x}$

$x\geq0$일 때 $f'(x)=0$에서 $x=1$

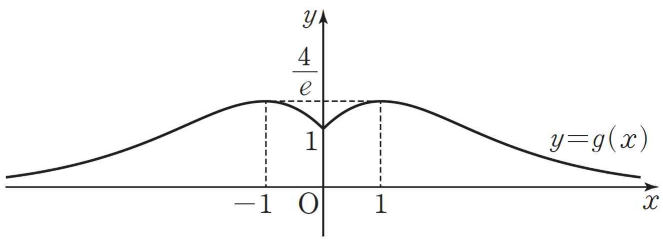
$x\geq0$일 때 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1	↗	$\frac{4}{e}$	↘

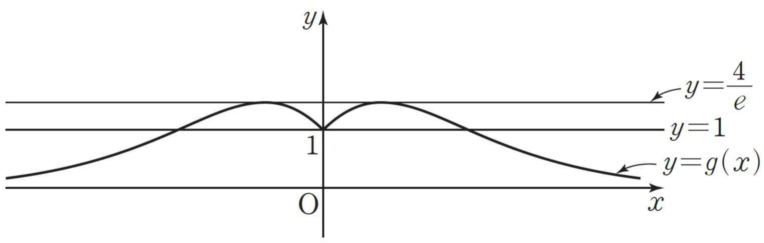
$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 $x\geq0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x\geq0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치하고, $x<0$일 때 함수 $y=f(x)\,(x>0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



또 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$를 교점의 개수에 따라 나타내면 다음과 같다.



그러므로 함수 $h(k)$는

$$h(k)=\begin{cases} 0 & (k\le 0) \\ 2 & (0<k<1) \\ 3 & (k=1) \\ 4 & \left(1<k<\frac{4}{e}\right) \\ 2 & \left(k=\frac{4}{e}\right) \\ 0 & \left(k>\frac{4}{e}\right) \end{cases}$$

이때 $h(1)=3$이고 a가 정수이므로 $\lim\limits_{k\to a-}h(k)+\lim\limits_{k\to a+}h(k)$의 값은

(i) $a<0$일 때

$k\le 0$일 때 $h(k)=0$이므로 $\lim\limits_{k\to a-}h(k)+\lim\limits_{k\to a+}h(k)=0$

(ii) $a=0$일 때

$$\lim_{k\to a-}h(k)+\lim_{k\to a+}h(k)=\lim_{k\to 0-}h(k)+\lim_{k\to 0+}h(k)=0+2=2$$

(iii) $a=1$일 때

$$\lim_{k\to a-}h(k)+\lim_{k\to a+}h(k)=\lim_{k\to 1-}h(k)+\lim_{k\to 1+}h(k)=2+4=6$$

(iv) $a\ge 2$일 때

$2<e<3$에서 $\frac{4}{3}<\frac{4}{e}<2$이고 $k>\frac{4}{e}$일 때 $h(k)=0$이므로

$$\lim_{k\to a-}h(k)+\lim_{k\to a+}h(k)=0$$

(i)~(iv)에 의하여

$\lim\limits_{k\to a-}h(k)+\lim\limits_{k\to a+}h(k)$는 $a=1$일 때 최댓값 6을 갖는다.

즉, $M=6$

따라서 $h(1)+M=3+6=9$

15. **정답** 15

최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $f(x)$는

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$g(x)=\frac{x^3+ax^2+bx}{e^x}$에서 $g(0)=0$이고,

$$g'(x)=\frac{(3x^2+2ax+b)e^x-(x^3+ax^2+bx)e^x}{e^{2x}}$$

$$=\frac{-x^3+(3-a)x^2+(2a-b)x+b}{e^x}$$

$g(2)=\frac{8+4a+2b}{e^2}$,

$$g'(2)=\frac{-8+(12-4a)+(4a-2b)+b}{e^2}=\frac{-b+4}{e^2}$$

이고 조건 (가)에서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선이 원점을 지나므로

$$g'(2)=\frac{g(2)-g(0)}{2-0}=\frac{g(2)}{2}$$

즉, $\frac{-b+4}{e^2}=\frac{4+2a+b}{e^2}$에서

$a+b=0$, $b=-a$ …… ㉠

또한 점 $(2,\ g(2))$가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이므로 $g''(2)=0$이어야 한다.

$g'(x)=\frac{-x^3+(3-a)x^2+3ax-a}{e^x}$에서

$g''(x)$

$$=\frac{\{-3x^2+(6-2a)x+3a\}e^x-\{-x^3+(3-a)x^2+3ax-a\}e^x}{e^{2x}}$$

$$=\frac{x^3+(a-6)x^2+(-5a+6)x+4a}{e^x}$$

이므로

$$g''(2)=\frac{8+(4a-24)+(-10a+12)+4a}{e^2}=\frac{-2a-4}{e^2}=0$$

에서 $a=-2$이고, ㉠에서 $b=2$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+2x$이므로

$f(3)=27-18+6=15$

16. **정답** 51

$g(x)=(1+\ln 3)f(x)-f(x)\ln f(x)$ 에서

$$g'(x)=(1+\ln 3)f'(x)-f'(x)\times\ln f(x)-f(x)\times\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$=f'(x)\times\{\ln 3-\ln f(x)\}$$

$g'(x)=0$에서 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=3$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로 $g'(3)=0$이다.

$g'(3)=0$이므로 $f'(3)=0$ 또는 $f(3)=3$

이때 $f'(3)\ne 0$이라 가정하면 $f(3)=3$이다.

(i) $\alpha>3$에서 $f'(\alpha)=0$인 경우

직선 $x=\alpha$가 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이므로 $f'(3)<0$이고 $x=3$의 좌우에서 $\ln 3-\ln f(x)$의 값이 음에서 양으로 바뀌므로 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극댓값을 갖게 되어 조건 (가)에 모순이다.

(ii) $\alpha<3$에서 $f'(\alpha)=3$인 경우

직선 $x=\alpha$가 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이므로 $f'(3)>0$이고 $x=3$의 좌우에서 $\ln 3-\ln f(x)$의 값이 양에서 음으로 바뀌므로 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극댓값을 갖게 되어 조건 (가)에 모순이다.

(i), (ii)에서 모두 조건 (가)에 모순이므로 $f'(3)=0$이다.

$x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

$g'(x)=f'(x)\times\{\ln 3-\ln f(x)\}$에서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극솟값을

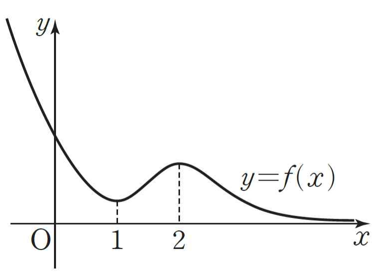
가지려면 $\ln 3-\ln f(3)>0$ 이어야 한다.
즉, $f(3)<3$ 이므로 이차방정식 $f(x)=3$을 만족시키는 서로 다른 두 실근이 존재한다. 이차방정식 $f(x)=3$을 만족시키는 서로 다른 두 실근을 α_1, α_2라 하자.
이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$의 두 교점은 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로
$\alpha_1+\alpha_2=6$
조건 (나)에 의하여
$3\alpha_1\alpha_2=24$이므로 $\alpha_1\alpha_2=8$
따라서 $f(x)-3=x^2-6x+8$에서
$f(x)=x^2-6x+11$ 이므로
$f(10)=10^2-6\times 10+11=51$

[참고]
함수 $g(x)$의 이계도함수를 이용하여 다음과 같이 $f'(3)=0$임을 구할 수도 있다.
$g'(x)=f'(x)\times\{\ln 3-\ln f(x)\}$ 에서
$$g''(x)=f''(x)\times\{\ln 3-\ln f(x)\}+f'(x)\times\left\{-\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$$
조건 (가)에서 $g'(3)=0$이므로 $f'(3)=0$ 또는 $f(3)=3$
$f'(3)\neq 0$이라 가정하면 $f(3)=3$이므로
$$g''(3)=-\frac{\{f'(3)\}^2}{f(3)}<0$$
즉, 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖게 되어 조건 (가)에 모순이다.
그러므로 $f'(3)=0$

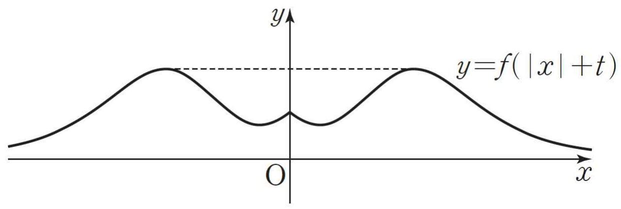
17. **정답** 8
$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{e^x}\text{ 에서}$$
$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(x^2-x+1)'\times e^x-(x^2-x+1)\times(e^x)'}{(e^x)^2}\\&=\frac{(2x-1)e^x-(x^2-x+1)e^x}{e^{2x}}\\&=-\frac{x^2-3x+2}{e^x}\\&=-\frac{(x-1)(x-2)}{e^x}\end{aligned}$$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

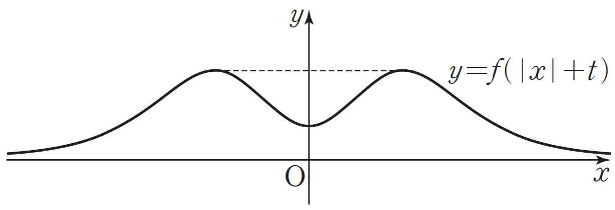
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



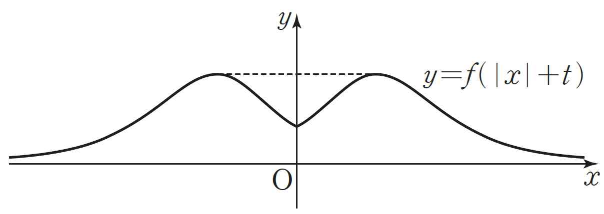
$$f(|x|+t)=\begin{cases}f(-x+t) & (x<0)\\ f(x+t) & (x\geq 0)\end{cases}$$
에서 함수 $y=f(x+t)$ $(x\geq 0)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-t$만큼 평행이동한 그래프의 $x\geq 0$인 부분이고, 함수 $y=f(-x+t)$ $(x<0)$의 그래프는 함수 $y=f(x+t)$ $(x>0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.
실수 t의 값에 따라 함수 $y=f(|x|+t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.
(ⅰ) $t<1$일 때



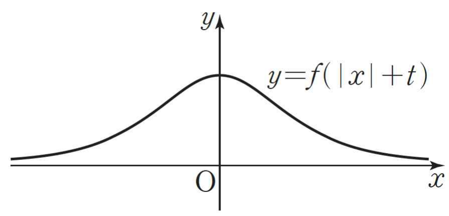
함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 3개이고 극소인 x의 값은 2개이므로 $g(t)=5$
(ⅱ) $t=1$일 때



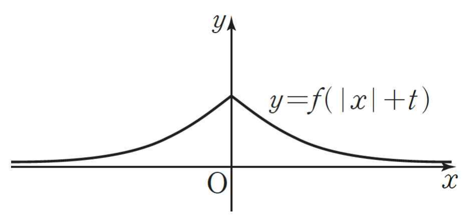
함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 2개이고 극소인 x의 값은 1개이므로 $g(t)=3$
(ⅲ) $1<t<2$일 때



함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 2개이고 극소인 x의 값은 1개이므로 $g(t)=3$
(ⅳ) $t=2$일 때

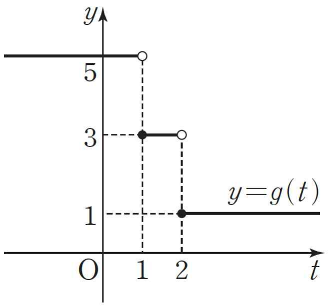


함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 1개이고 극소인 x의 값은 0개이므로 $g(t)=1$
(ⅴ) $t>2$일 때



함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 1개이고 극소인 x의 값은 0개이므로 $g(t)=1$
(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 함수 $g(t)$와 그 그래프는 다음과 같다.
$$g(t)=\begin{cases}5 & (t<1)\\ 3 & (1\leq t<2)\\ 1 & (t\geq 2)\end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t=1$과 $t=2$에서 불연속이고, 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $h(1)=0$이고 $h(2)=0$이어야 하므로
$h(x)=(x-1)(x-2)$이다.
따라서 $h(0)+h(4)=2+6=8$



18. **정답** 32

$f(x)=\sqrt{2}\cos x\times e^{\sqrt{2}\sin x}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\sqrt{2}\sin x\times e^{\sqrt{2}\sin x}+\left(\sqrt{2}\cos x\right)^2\times e^{\sqrt{2}\sin x}\\&=\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\sin x}\left(\sqrt{2}\cos^2 x-\sin x\right)\\&=\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\sin x}\left\{\sqrt{2}\left(1-\sin^2 x\right)-\sin x\right\}\\&=-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\sin x}\left(\sin x+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$0\leq x<2\pi$에서 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}\pi$

$0\leq x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

$f(0)=\sqrt{2}\cos 0\times e^{\sqrt{2}\sin 0}=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$

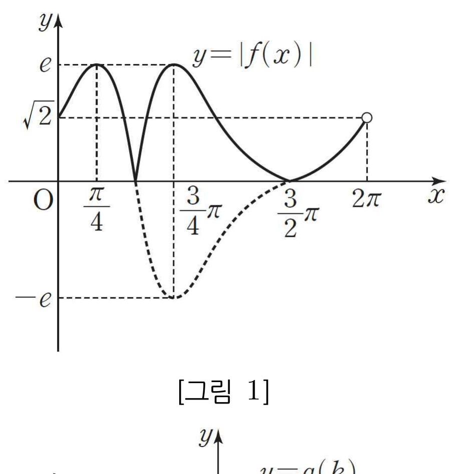
$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}\times e^{\sqrt{2}sin\frac{\pi}{4}}=1\times e=e$

$f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}\cos\dfrac{3}{4}\pi\times e^{\sqrt{2}sin\frac{3}{4}\pi}=-1\times e=-e$

$\displaystyle\lim_{x\to 2\pi-}f(x)=\sqrt{2}\cos 2\pi\times e^{\sqrt{2}\sin 2\pi}=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$

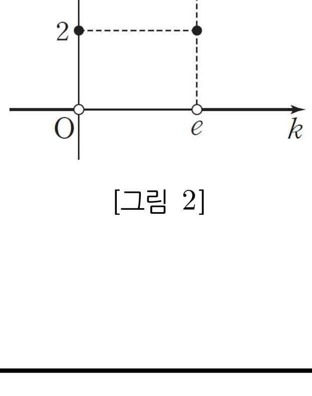
이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 1]과 같다.
실수 k에 대하여 방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는

$$g(k)=\begin{cases}0 & (k<0,\ k>e)\\2 & (k=0,\ k=e)\\4 & (0<k<e)\end{cases}$$



[그림 1]

이므로 함수 $y=g(k)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.
따라서 $A=\{0,\ 2,\ 4\}$, $B=\{0,\ e\}$이므로
$n(A)=3$, $n(B)=2$이고
$10\times n(A)+n(B)=10\times 3+2=32$



[그림 2]

TH①. 적분 (3점)

TRY! 2025학년도 9월 평가원모의고사

1. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}+4e^{2t}$이다. $f(1)=2e^2+1$일 때, $f(e)$의 값은?

① $2e^{2e}-1$ ② $2e^{2e}$ ③ $2e^{2e}+1$
④ $2e^{2e}+2$ ⑤ $2e^{2e}+3$

TRY! 2024학년도 수능

2. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
모든 양수 a에 대하여

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

이고 $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 36 ② 40 ③ 44
④ 48 ⑤ 52

TH②. 적분 (4점)

2025학년도 9월 평가원모의고사

3. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f'(2x)\sin \pi x+x$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_{0\,(f(0))}^{1\,(f(1))} g^{-1}(x)\,dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin \pi x\,dx+\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\boxed{\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx}$ ㄱ 의 값은?

① $-\frac{1}{\pi}$　② $-\frac{1}{2\pi}$　③ $-\frac{1}{3\pi}$　④ $-\frac{1}{4\pi}$　⑤ $-\frac{1}{5\pi}$

ㄱ: $1\times \cancel{f(1)} - 0\times \cancel{f(0)} - \left(\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{2}\right)$
$\quad\ \ 1 \qquad\quad 0$

$\frac{1}{2}=3\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{12}=\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx$

$=\cancel{\left[\sin\pi x\times\frac{1}{2}f(2x)\right]}-\int_0^1 \pi\cos\pi x\times\frac{1}{2}f(2x)\,dx$
$\quad 0$

$\int_0^1 \cos\pi x\, f(2x)\,dx=-\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{6}$
$2x=t$

$\int_0^2 \cos\frac{\pi}{2}t\, f(t)\,\frac{dt}{2}=-\frac{1}{6\pi}$

2025학년도 9월 평가원모의고사 30번

4. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(k-|x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$에 대하여 $F(0)$의 최솟값을 $g(k)$라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $F'(x)=f(x)$이고 $F(x)\geq f(x)$이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=pe+q$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$이고, p와 q는 유리수이다.)

5. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이고, $x<0$일 때

$$f(x) = -4xe^{4x^2}$$

이다. 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자. 두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

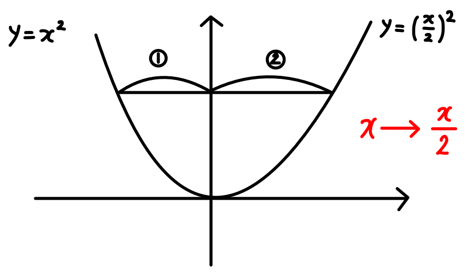
$$2g(t)+h(t)=k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)dx = e^4-1$일 때, $\dfrac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

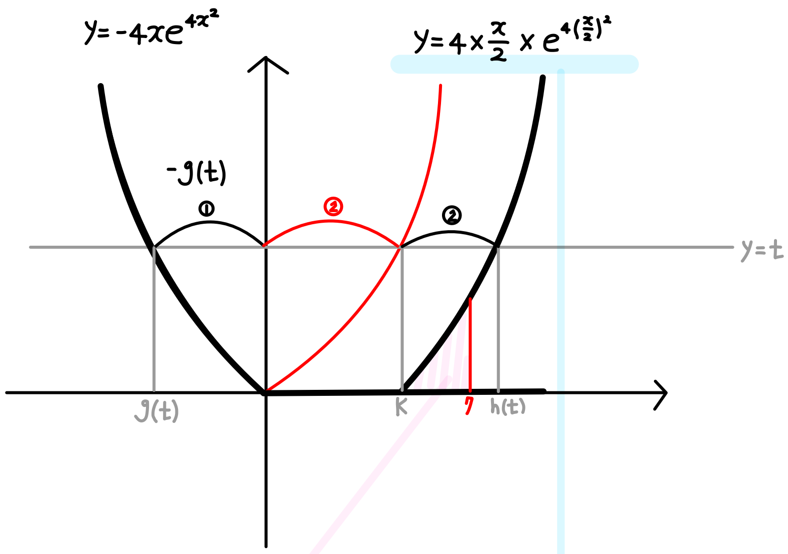
① $\dfrac{3}{2}e^5$ ② $\dfrac{4}{3}e^7$ ③ $\dfrac{5}{4}e^9$

④ $\dfrac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\dfrac{7}{6}e^{13}$

① 「IDEA



②



$\int_0^7 f(x)dx = \int_k^7 f(x)dx = \int_0^{7-k} f(x+k)dx$

$= \int_0^{7-k} 2xe^{x^2}dx$

$= \left[e^{x^2}\right]_0^{7-k}$

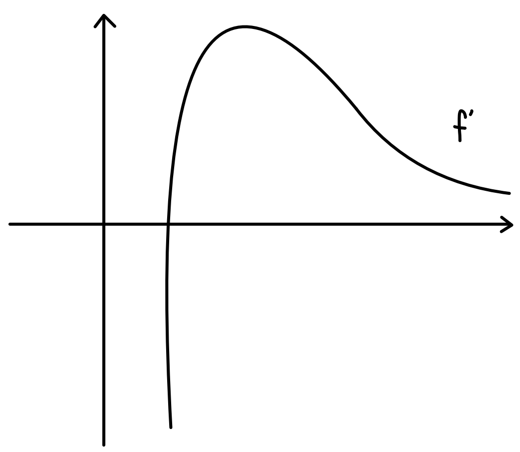
$= e^4-1$

6. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

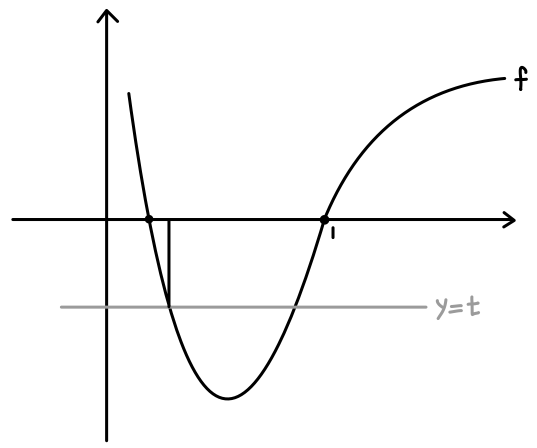
(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f'(x) = \dfrac{\ln x + k}{x}$이다.

(나) 곡선 $y=f(x)$는 x축과 두 점 $\left(\dfrac{1}{e^2}, 0\right)$, $(1, 0)$에서 만난다.

$t > -\dfrac{1}{2}$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 두 점의 x좌표 중 작은 값을 $g(t)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=\dfrac{3}{2}$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\dfrac{ae+b}{e^3}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, k는 상수이고, a, b는 유리수이다.) [4점]



$f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x$



$f(g(t)) = t$

$\int_0^{\frac{3}{2}} |g(x)|dx = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e^3}} |t| f'(t)dt$

$x=f(t)$

$f(t) = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(\ln t)^2 + \ln t$

$\ln t = -3$

$t = e^{-3}$

7. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

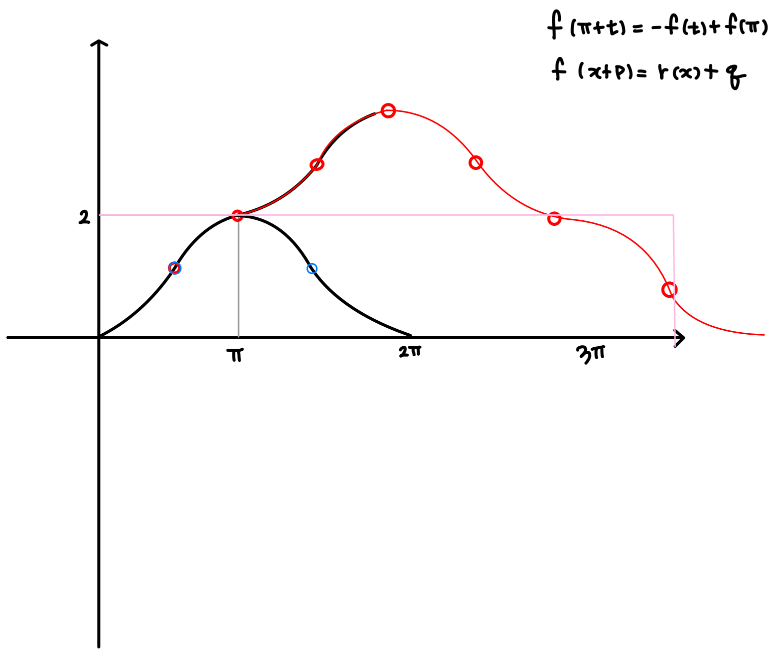
> (가) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^{x}}=1$
>
> (나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\displaystyle\int_{0}^{14}g(x)\,dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

8. 닫힌구간 $[0,\ 4\pi]$에서 연속이고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle\int_{0}^{4\pi}|f(x)|\,dx$의 최솟값은? [4점]

> (가) $0\le x\le \pi$일 때, $f(x)=1-\cos x$이다.
>
> (나) $1\le n\le 3$인 각각의 자연수 n에 대하여
>
> $f(n\pi+t)=f(n\pi)+f(t)\ \ (0<t\le \pi)$
>
> 또는
>
> $f(n\pi+t)=f(n\pi)-f(t)\ \ (0<t\le \pi)$
>
> 이다.
>
> (다) $0<x<4\pi$에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 6이다.

① 4π ② 6π ③ 8π
④ 10π ⑤ 12π

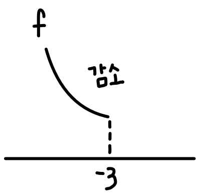


9. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0, \infty)$에서 $g(x) \geq 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \leq -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f(-3)$이다.
> (나) $x > -3$인 모든 실수 x에 대하여
> $\underbrace{g(x+3)}_{\geq 0}\{f(x)-f(0)\}^2 = \underbrace{f'(x)}_{\geq 0}$ 이다.

$\int_4^5 g(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

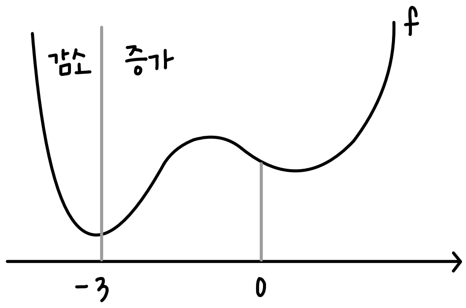
(가)



(나)

$x=0$ 대입 $f'(0)=0$

$f'(x) \geq 0 \quad (x>-3)$



$\int_4^5 g(x)dx = \int_1^4 g(x+3) \frac{f'(x)}{(f(x)-f(0))^2} dx$

$= \left[-\frac{1}{\cancel{f(x)-f(0)}} \right]_1^4$

$x^3(x+4)$

10. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(-x) = f(x)$
> (나) $f(x+2) = f(x)$

$\underbrace{\int_{-1}^{5} f(x)(x+\cos 2\pi x)dx = \frac{47}{2}}_{ㄱ}$, $\int_0^1 f(x)dx = 2$ 일 때,
$\int_0^1 f'(x)\sin 2\pi x\, dx$ 의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{5}{12}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

$\int_0^1 f'(x)\sin 2\pi x\, dx$

$= \underbrace{\cancel{\left[\sin 2\pi x \times f(x) \right]_0^1}}_{0} - \int_0^1 f(x) \times 2\pi \cos 2\pi x\, dx$

$= -2\pi \int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\, dx$

ㄱ. $\cancel{\int_1^5 f(x) \times x\, dx} + \cancel{\int_{-1}^5 f(x)\cos 2\pi x\, dx} = \frac{47}{2}$

$\cancel{\int_1^3 xf(x)dx} + \cancel{\int_3^5 x f(x) dx}$ $\quad 3 \times \int_{-1}^1$

$\int_{-1}^1 2f(x)dx + \cancel{\int_{-1}^1 4xf(x)dx}$ $\quad 6 \times \int_0^1 f(x)\cos 2\pi\, dx$

$12\int_0^1 f(x)dx$

Try! 2022학년도 수능

11. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $\int_{1}^{2} f(x)dx=\frac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_{1}^{8} xf'(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Try! 2022학년도 9월 평가원모의고사

12. 최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x}=0$
>
> (나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

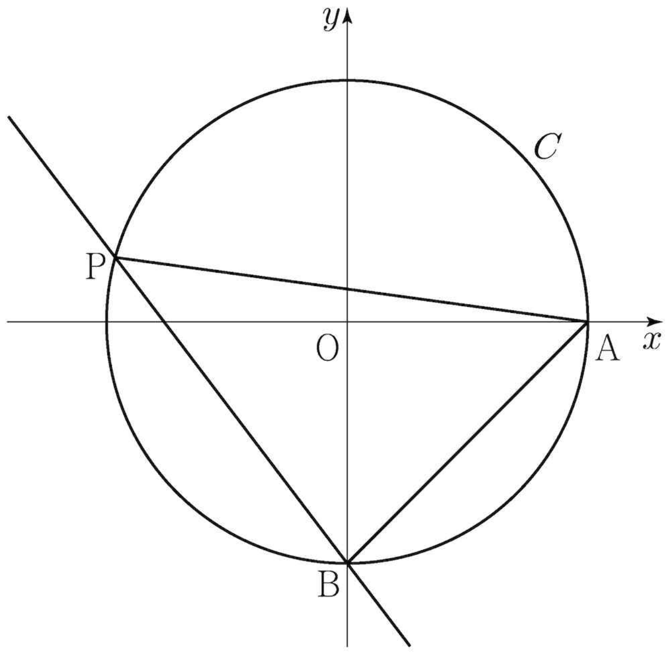
함수 $g(x)$는 $0 \leq x < 1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\int_{0}^{5} xg(x)dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Try!

2022학년도 9월 평가원모의고사

13. 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C와 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -2)$가 있다. 원 C 위에 있고 x좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 하자.
점 $\mathrm{Q}(0,\ 2\cos\theta)$에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta$의 값은? [4점]

① $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$
④ $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{2}$



암기

2024년 수능특강 Lv2

New

14. 1 보다 큰 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=\int_0^1 \frac{1}{4+(x-1)e^t}dt$$

일 때, $f'(2)$ 의 값은?

① $\dfrac{1-e}{5(e+4)}$ ② $\dfrac{1-e}{4(e+4)}$ ③ $\dfrac{1-e}{3(e+4)}$
④ $\dfrac{1-e}{2(e+4)}$ ⑤ $\dfrac{1-e}{e+4}$

$$f(x)=\int_0^1 \frac{e^{-t}}{4e^{-t}+(x-1)}dt$$

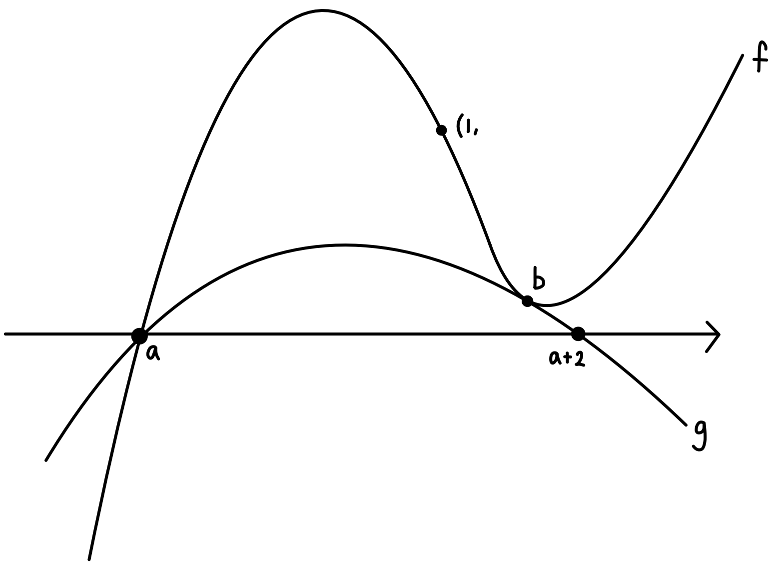
$$=\left[\left(\ln\left|4e^{-t}+(x-1)\right|\right)\times -\frac{1}{4}\right]_0^1$$

15. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$ $(a<b)$ 에서만 만나고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(a)=g(a+2)=0$
>
> (나) $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

$g(-1)=1$ 이고 $f''(1)=0$ 일 때, $\displaystyle\int_5^6 \frac{\left(\frac{5}{x}-2\right)g(x)}{f(x)}dx$ 의 값은?

① $\ln\dfrac{3}{2}$ ② $\ln\dfrac{5}{2}$ ③ $\ln\dfrac{7}{2}$
④ $\ln\dfrac{9}{2}$ ⑤ $\ln\dfrac{11}{2}$



(1) $f-g=(x-a)(x-b)^2$

$=(\underbrace{x^3-3x^2+\cdots}_{f})-(\underbrace{-x^2+\cdots}_{g})$

$=x^3-2x^2+\cdots$

$a+2b=2$

(2) $g(x)=(x-a)(x-(a+2))$

$g(-1)=(a+1)(a+3)=1$

2024년 수능특강 Lv3

연계 가능

16. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$의 값은?

> (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이다.
>
> (나) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=12$
>
> (다) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=12$

① $2\pi-12$ ② $3\pi-12$ ③ $4\pi-12$
④ $5\pi-12$ ⑤ $6\pi-12$

① ⌜IDEA

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(-x)dx$ ⌟

y축 대칭

②

ㄱ : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx=K$

ㄴ : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-x\overset{-f'(x)\ \times\ \pi^{f'(x)}}{\cancel{f'(-x)}}}{1+\pi^{\underset{-f'(x)\ \times\ \pi^{f'(x)}}{\cancel{f'(-x)}}}}dx=K$

$\dfrac{xf'(x)\times\pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}$

ㄱ + ㄴ : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)\left(\cancel{1+\pi^{f'(x)}}\right)}{\cancel{1+\pi^{f'(x)}}}dx=2K$

2024년 수능완성

연계 가능

17. 정의역이 $\{x \mid x>0\}$인 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 연속일 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_{f(1)}^{f(x)} g(t)\,dt = ax+\ln x-\frac{b}{3}$ (단, a, b는 상수)
(나) $f(4)-f(2)=\dfrac{1}{4}+3\ln 2$

$f(1)=2$일 때, $f(3)=\dfrac{p+q\ln 3}{3}$이다. 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. (단, $\ln 3$은 무리수이다.) [4점]

$$\int_{f(1)}^{f(x)} g(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt = xf(x) - 1\cdot f(1)$$

TH③. 정적분으로 표현된 함수 (4점)

TRY! 2025학년도 사관학교

18. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = e^{2x}-2x+a$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선을 l이라 할 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.)

① $2-\dfrac{6}{e^2}$ ② $2-\dfrac{7}{e^2}$ ③ $2-\dfrac{8}{e^2}$

④ $2-\dfrac{9}{e^2}$ ⑤ $2-\dfrac{10}{e^2}$

19. 상수 a $(0<a<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x \ln\left(e^{|t|}-a\right)dt$$

라 하자. 함수 $f(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

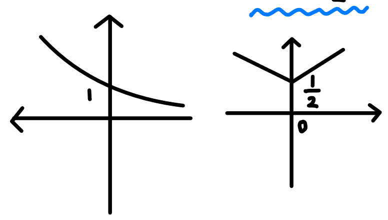
> (가) 함수 $f(x)$는 $x=\ln\frac{3}{2}$에서 극값을 갖는다.
>
> (나) $f\left(-\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{f(k)}{6}$

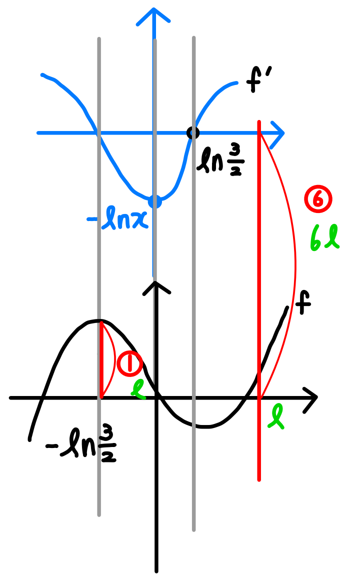
$\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx=p$일 때, $100\times a\times e^p$의 값을 구하시오.

$f(0)=0$, $f'(x)=\ln\left(e^{|x|}-\cancel{a}\right)$ $\frac{1}{2}$

f는 기함수 우함수

$\ln x \circ \left(e^{|x|}-\frac{1}{2}\right)$





$$-\int_0^{\ln\frac{3}{2}} \frac{f'(x)}{f(x)-f(-k)} + \int_{\ln\frac{3}{2}}^{k}$$

$$\boxed{-\left[\ln|f(x)-f(-k)|\right]_0^{\ln\frac{3}{2}}}$$

$-l-(-6l)$

$\ln 5l-\ln 6l$

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=|\sin x|\cos x$$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt$$

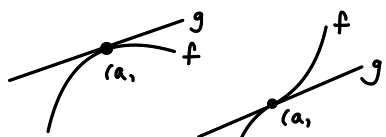
가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$\frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)$의 값을 구하시오. [4점]

$h(x)=\int_0^x f(t)-\underline{g(t)}\,dt$

(a, f(a)) 접선

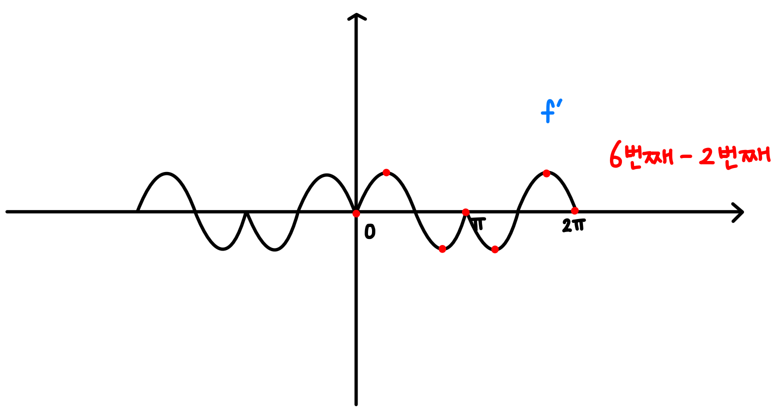
$h'(x)=f(x)-g(x)$



즉, g가 f의 변곡점에서 접선이어야 h'의 부호 변동 가능

즉 f의 변곡점 x값이 a

$f'(x)=|\sin x|\cos x$ $\frac{\sin 2x}{2}$



2024학년도 9월 평가원모의고사

21. 실수 a $(0<a<2)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}2|\sin 4x| & (x<0)\\ -\sin ax & (x\geq 0)\end{cases}$$

이라 하자. 함수

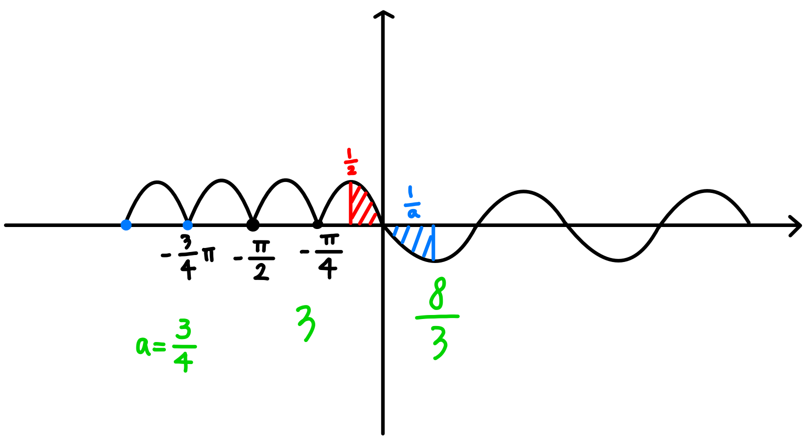
$$g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a의 최솟값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1

④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt\right|$



2022년도 10월 교육청모의고사

22. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\ln\{f(x)+f'(x)+1\}$$

이 있다. 상수 a와 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

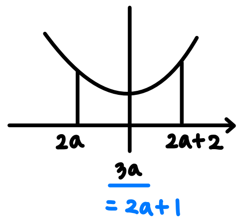
> (가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$이고
> $$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt=\int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt$$
> 이다.
>
> (나) $g(4)=\ln 5$

$\int_{3}^{5}\{f'(x)+2a\}g(x)dx=m+n\ln 2$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

① $\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt=\int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt$

$g(3a+x)=g(3a-x)$

$x=\cancel{3a}\ 3$ 대칭, $x=0$ 대입



$a=1$

② $g(x)=\ln\left(\underbrace{(x-3)^2+n}_{2\text{차식}}\right)$ $f(x)+f'(x)+1$

$g(4)=\ln 5$

2024년 수능특강 Lv2

연계 가능

23. $0 \le x \le 1$ 일 때, x 에 대한 방정식

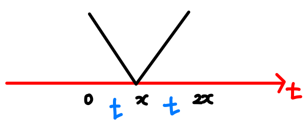
$$2\pi\int_0^{2x} |\,t-x\,|\cos 2\pi t\,dt = x\sin 4\pi x$$

의 서로 다른 실근의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4

④ 5 ⑤ 6

$$\int_0^{2x} |t-x|\cos 2\pi t\,dt = \int_0^{x} -(t-x)\cos 2\pi t\,dt + \int_x^{2x} (t-x)\cos 2\pi t\,dt$$



2024년 수능특강 Lv3

연계 가능

24. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 다항함수

$$g(x) = x^2 + \int_0^1 (x+t)\,g(t)dt$$

에 대하여 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \int_0^{g(x)} \underset{S(t)}{\boxed{e^{f(t)}}}dt = S(g(x)) - S(0)$$

라 하자. 함수 $h(x)$ 가 $x = k$ 에서 극솟값을 가질 때, $g(2k)$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.)

① $-\dfrac{8}{3}$ ② $-\dfrac{17}{6}$ ③ -3

④ $-\dfrac{19}{6}$ ⑤ $-\dfrac{10}{3}$

$$g(x) = x^2 + \underbrace{\int_0^1 g(t)dt}_{K_1} \times x + \underbrace{\int_0^1 tg(t)dt}_{K_2}$$

$$K_1 = \int_0^1 t^2 + K_1 t + K_2\,dt$$

$$K_2 = \int_0^1 t\,(t^2 + K_1 t + K_2)\,dt$$

$$h(x) = \int_0^{g(x)} \overset{S(t)}{e^{f(t)}}\,dt = S(g(x)) - S(0)$$

$$h'(x) = g'(x)\overset{e^{f(g(x))}}{\cancel{S(g(x))}} = 0$$

25. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=x^2e^{-x}+\int_0^x e^{t-x}f(t)dt \quad e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $2e^2-\dfrac{6}{e^2}$ ② $2e^2+2$ ③ $2e^2+\dfrac{6}{e^2}+2$

④ $2e^2-\dfrac{6}{e^2}+4$ ⑤ $2e^2+\dfrac{6}{e^2}+4$

$$f'(x)=2xe^{-x}\underbrace{-x^2e^{-x}-e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt}_{-f(x)}+f(x)$$

Try!

26. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt=e^x+8e^{-x}-3x^2+ax+b$$

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $a+b+S$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $6\ln 2-6$ ② $8\ln 2-6$ ③ $6\ln 2-4$

④ $8\ln 2-4$ ⑤ $6\ln 2-2$

연계 가능

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)\cos x = x\cos^2 x - \sin x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)dt - \int_0^x f(t)\sin t\,dt$$

를 만족시킬 때, $(\pi+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)\sin x + f'(x)\cos x\}dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

부분적분

$f(0)=0$

$f'(x)\cos x + \cancel{f(x)\sin x}$

$= \cos^2 x + 2x\cos x\, x - \sin x - \cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)dt - \cancel{f(x)\sin x}$

$f'(x) = \cos x + 2x\, x - \sin x - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)dt}_{=k}$

$k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t - 2t\sin t - k\, dt$

28. 함수 $f(x)=e^{2x}+2e^x-3$과 양수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \{t-f(s)\}ds$$

가 최대가 되도록 하는 x의 값을 $h(t)$라 하자. $h'(k)=\frac{1}{12}$인 실수 k에 대하여 $0<t\le k$에서 $g(h(k))$의 최댓값은 $p+q\ln 2$이다. $10(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

① $g(0)=0$

$g'(x) = t - \underbrace{f(x)}_{h(t)} = 0$, $f(h(t)) = t$

② $f(h(k)) = k$, $h'(k) = \frac{1}{f'(h(k))} = \frac{1}{12}$

$h(k) = \ln 2$ 「계산」

$f(\ln 2) = k = 5$

③ $0 < t \le 5$ $g(\ln 2)$의 Max

$g(\ln 2) = \int_0^{\ln 2} \underbrace{t}_{Max} - \underbrace{f(s)}_{고정} ds \longrightarrow Max$

TH④. 넓이, 부피, 운동

Try! 2024학년도 9월 평가원모의고사

29. $x=-\ln 4$에서 $x=1$까지의 곡선

$$y=\frac{1}{2}\left(\left|e^{x}-1\right|-e^{|x|}+1\right)$$

의 길이는? [3점]

① $\frac{23}{8}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{29}{8}$

④ 4 ⑤ $\frac{35}{8}$

Try! 2023학년도 사관학교

30. $0<a<1$ 인 실수 a에 대하여 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 정의된 두 함수

$$y=\sin x,\ y=a\tan x$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(a)$ 라 할 때, $f'\left(\frac{1}{e^{2}}\right)$ 의 값은? [4점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$

④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

Try! 2022학년도 수능

31. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$ ② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$ ③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$

④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$

Pass 2024년 수능특강 Lv3

New

32. 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=nx(1-x^2)^n$$

이라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=a_n$에서 최댓값을 갖는다고 할 때, 닫힌구간 $[0,\ a_n]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=a_n$및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

① $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ② $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

③ $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$ ④ $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$

⑤ $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^2\sqrt{e}}\right)$

33. 점 $A\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}e\right)$를 지나고 함수 $f(x)=k(\ln x)^2$의 그래프에 접하는 두 접선 l_1, l_2가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=f(x)$와 두 접선 l_1, l_2가 접하는 점의 x좌표는 각각 p, q $(p<q)$이다.
> (나) 두 접선 l_1, l_2는 서로 수직이다.

곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=p$, $x=q$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k는 양의 상수이다.)

① $\frac{\sqrt{3}}{6}(e^4-1)$　② $\frac{\sqrt{3}}{3}(e^4-1)$
③ $\frac{\sqrt{3}}{2}(e^4-1)$　④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}(e^4-1)$
⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{6}(e^4-1)$

Pass 2024년 수능특강 Lv3
연계 가능

34. 양의 상수 a에 대하여 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 정의된 두 함수

$f(x)=a\sec x$,
$g(x)=2\sin x\cos x$

의 그래프가 단 한 점에서만 만나고 그 점에서의 접선이 서로 일치한다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{2\sqrt{3}}{9}ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{2}$
② $\frac{2\sqrt{3}}{9}ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{3}$
③ $\frac{2\sqrt{3}}{9}ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{4}$
④ $\frac{2\sqrt{3}}{9}ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{5}$
⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{9}ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{6}$

1. [정답] ④

[해설]

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 기울기가

$\dfrac{1}{t}+4e^{2t}$ 이므로 $\quad f'(t)=\dfrac{1}{t}+4e^{2t}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,dx \\ &= \int\left(\frac{1}{t}+4e^{2t}\right)dt \\ &= \ln|t|+2e^{2t}+C \ (C\text{는 상수}) \end{aligned}$$

$f(1)=2e^2+1$ 이므로

$$\ln 1+2e^2+C=2e^2+1, \qquad C=1$$

$$\therefore\ f(e)=\ln|e|+2e^{2e}+1=2e^{2e}+2$$

2. ④

함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로

$g(f(x))=x$

이 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$

이때 $g'(f(x))f(x)\neq 0$ 이므로 $\quad g'(f(x))\neq 0$, $f(x)\neq 0$

즉 $g'(f(x))f'(x)f(x)=f(x)$ 에서 $\quad g'(f(x))f(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$\therefore\ \int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx=\int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

$$=\Big[\ ln|f(x)|\ \Big]_1^a$$

$=\ln f(a)-\ln f(1)$

$\ln f(a)-\ln f(1)=2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$ 에서 $f(1)=8$ 이므로

$f(a)=4a^2(a+1)$

$\therefore\ f(2)=4\times 2^2\times(2+1)=48$

3. [정답] ③

[해설]

$g(0)=0,\ g(1)=1$ 이므로 $g^{-1}(0)=0,\ g^{-1}(1)=1$ 이고

$(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx &= \Big[x\times g^{-1}(x)\Big]_0^1-\int_0^1 x\times\left(g^{-1}\right)'(x)\,dx \\ &= 1-\int_0^1\frac{x}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}\,dx\end{aligned}$$

$x=g(t)$ 라 하면 $\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=0,\ x=1$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}\,dx &= \int_0^1\frac{g(t)}{g'\left(g^{-1}(g(t))\right)}\times g'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 g(t)\,dt\end{aligned}$$

$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=1-\int_0^1 g(x)\,dx$$

$\displaystyle\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}$ 에서

$$1-\int_0^1 g(x)\,dx=2\int_0^1\{g(x)-x\}\,dx+\frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\int_0^1 x\,dx=\frac{7}{12}$$

$$\int_0^1\{f'(2x)\sin\pi x+x\}\,dx=\frac{7}{12}$$

$\displaystyle\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$ 이므로 $\quad\displaystyle\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx=\frac{1}{12}$

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx \\ &=\left[\frac{1}{2}f(2x)\sin\pi x\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\times\pi\cos\pi x\,dx \\ &=-\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(2x)\cos\pi x\,dx\end{aligned}$$

$$\int_0^1 f(2x)\cos\pi x\,dx=-\frac{1}{6\pi}$$

$2x=s$ 라 하면 $\dfrac{ds}{dx}=2$ 이고 $x=0$ 일 때 $s=0,\ x=1$ 일 때 $s=2$ 이므로

$$\int_0^1 f(2x)\cos\pi x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(s)\cos\frac{\pi}{2}s\,ds$$

$$\therefore\ \int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=-\frac{1}{3\pi}$$

4. [정답] 25

[해설]

$f(x)=\begin{cases}(k+x)e^{-x} & (x<0)\\ (k-x)e^{-x} & (x\geq 0)\end{cases}$ 이고 $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx$ 이므로

$$F(x)=\begin{cases}-(x+k+1)e^{-x}+C_1 & (x<0)\\ (x-k+1)e^{-x}+C_2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

함수 $F(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 0-}F(x)=\lim_{x\to 0+}F(x)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-}F(x)&=\lim_{x\to 0-}\left\{-(x+k+1)e^{-x}+C_1\right\}\\ &=-k-1+C_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}F(x)&=\lim_{x\to 0+}\left\{(x-k+1)e^{-x}+C_2\right\}\\ &=-k+1+C_2\end{aligned}$$

$-k-1+C_1=-k+1+C_2$ 이므로 $\quad C_2=C_1-2$

(ⅰ) $x<0$ 일 때

$F(x)\geq f(x)$ 이므로

$$-(x+k+1)e^{-x}+C_1\geq (k+x)e^{-x}$$

$$(2x+2k+1)e^{-x}\leq C_1$$

$h_1(x)=(2x+2k+1)e^{-x}$ 라 하면

$$h_1{}'(x)=-(2x+2k-1)e^{-x}$$

$h_1{}'(x)=0$ 에서 $\quad x=-\dfrac{2k-1}{2}$

(a) $k\le \dfrac{1}{2}$ 일 때

$x<0$ 일 때 $h_1{}'(x)>0$ 이므로 함수 $h_1(x)$ 는 증가한다.

$x<0$ 일 때 부등식 $h_1(x)\le C_1$ 이 성립하므로

$h_1(0)\le C_1,\qquad C_1\ge 2k+1$

(b) $k>\dfrac{1}{2}$ 일 때

$x<0$ 일 때 함수 $h_1(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{2k-1}{2}$	$\cdots$	(0)
$h_1{}'(x)$	$+$	0	$-$	
$h_1(x)$	↗	$h_1\left(-\dfrac{2k-1}{2}\right)$	↘	$h_1(0)$

$x<0$ 일 때 부등식 $h_1(x)\le C_1$ 이 성립하므로

$h_1\left(-\dfrac{2k-1}{2}\right)\le C_1,\qquad C_1\ge 2e^{\frac{2k-1}{2}}$

(a), (b)에서 $k\le\dfrac{1}{2}$ 일 때 $C_1\ge 2k+1$, $k>\dfrac{1}{2}$ 일 때

$C_1\ge 2e^{\frac{2k-1}{2}}$ 이다.

(ⅱ) $x\ge 0$ 일 때

$F(x)\ge f(x)$ 이므로

$(x-k+1)e^{-x}+C_2\ge (k-x)e^{-x}$

$(2k-2x-1)e^{-x}\le C_2$

$h_2(x)=(2k-2x-1)e^{-x}$ 라 하면

$h_2{}'(x)=(2x-2k-1)e^{-x}$

$h_2{}'(x)=0$ 에서 $\quad x=\dfrac{2k+1}{2}$

$x\ge 0$ 일 때 함수 $h_2(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2k+1}{2}$	$\cdots$
$h_2{}'(x)$		$-$	0	$+$
$h_2(x)$	$h_2(0)$	↘	$h_2\left(\dfrac{2k+1}{2}\right)$	↗

$\lim\limits_{x\to\infty}h_2(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(2k-2x-1)e^{-x}=0$ 이고,

$h_2(0)=2k-1$ 이다.

(a) $k\le\dfrac{1}{2}$ 일 때

$x\ge 0$ 에서 부등식 $h_2(x)\le C_2$ 가 성립하므로

$C_2\ge 0$

$C_2=C_1-2$ 이므로 $\qquad C_1\ge 2$

(b) $k>\dfrac{1}{2}$ 일 때

$x\ge 0$ 일 때 부등식 $h_2(x)\le C_2$ 가 성립하므로

$C_2\ge 2k-1$

$C_2=C_1-2$ 이므로 $\qquad C_1\ge 2k+1$

(a), (b)에서 $k\le\dfrac{1}{2}$ 이면 $C_1\ge 2$, $k>\dfrac{1}{2}$ 이면 $C_1\ge 2k+1$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k\le\dfrac{1}{2}$ 일 때 $C_1\ge 2$, $k>\dfrac{1}{2}$ 일 때

$C_1\ge 2e^{\frac{2k-1}{2}}$ 이다.

$F(0)=-k-1+C_1$ 이므로 $k\le\dfrac{1}{2}$ 일 때 $F(0)\ge -k+1$,

$k>\dfrac{1}{2}$ 일 때 $F(0)\ge -k-1+2e^{\frac{2k-1}{2}}$ 이다.

$$g(k)=\begin{cases}-k+1 & \left(k\le\dfrac{1}{2}\right)\\ -k-1+2e^{\frac{2k-1}{2}} & \left(k>\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$

$$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}+\left(2e-\frac{5}{2}\right)=2e-\frac{7}{4}$$

따라서 $p=2$, $q=-\dfrac{7}{4}$ 이므로

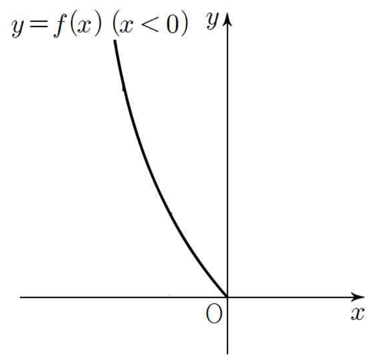
$100(p+q)=25$

5. ②

함수 $f(x)$ 가 $x<0$ 에서 $f(x)=-4xe^{4x^2}$ 이므로

$f'(x)=-4e^{4x^2}-32x^2e^{4x^2}=-4e^{4x^2}(1+8x^2)$

따라서 $x<0$ 인 임의의 실수 x 에 대하여 $f'(x)<0$ 이므로 다음 그림과 같이 $x<0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다.



이때 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근 $g(t)$, $h(t)$ $(g(t)<0<h(t))$ 에 대하여

$2g(t)+h(t)=k$

$f(x)=-4xe^{4x^2}$ 에서

$f(g(t))=-4g(t)e^{4\{g(t)\}^2}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$f(h(t))=t$ 에서 $h(t)=k-2g(t)$ 이므로

$f(k-2g(t))=t$

이때 $k-2g(t)>0$ 이므로 $k-2g(t)=x$ 라 하면 ㉠에서

$$f(x)=-4\left(\frac{k-x}{2}\right)e^{4\left(\frac{k-x}{2}\right)^2}=-2(k-x)e^{(k-x)^2}\quad (x>0)$$

$\displaystyle\int_0^7 f(x)dx=e^4-1$ 이므로 $k=0$ 이면

$\displaystyle\int_0^7\left(2xe^{x^2}\right)dx$ 에서 $x^2=p$ 라 하면 $x=0$ 일 때 $p=0$ 이고,

$x=7$ 일 때 $p=49$ 이며 $2x=\dfrac{dp}{dx}$ 이므로

$$\int_0^7\left(2xe^{x^2}\right)dx=\int_0^{49}e^p\,dp=\Big[\,e^p\,\Big]_0^{49}=e^{49}-1$$

즉 $e^{49}-1>e^4-1$ 이므로 $0<k<7$ 이다.

$\therefore\ f(x)=\begin{cases} -4xe^{4x^2} & (x<0) \\ 0 & (0\le x<k) \\ -2(k-x)e^{(k-x)^2} & (x\ge k) \end{cases}$ …… ㉡

$\int_0^7 f(x)dx=e^4-1$ 에서

$\int_0^k f(x)dx+\int_k^7 f(x)dx$

$=\Big[0\Big]_0^k+\int_k^7\left\{-2(k-x)e^{(k-x)^2}\right\}dx$

$=\int_k^7\left\{-2(k-x)e^{(k-x)^2}\right\}dx$

이고 $(k-x)^2=q$라 하면 $x=k$일 때 $q=0$, $x=7$일 때

$q=(7-k)^2$이고 $2(k-x)=\dfrac{dq}{dx}$ 이므로

$\int_k^7\left\{-2(k-x)e^{(k-x)^2}\right\}dx=\int_0^{(7-k)^2}e^q dq=e^{(7-k)^2}-1$

즉 $e^{(7-k)^2}-1=e^4-1$ 에서 $(7-k)^2=4$

$7-k=2$ 또는 $7-k=-2$

$\therefore\ k=5$ ($\because\ 0<k<7$)

㉡에서 $f(x)=-2(5-x)e^{(5-x)^2}$ $(x\ge 5)$ 이므로

$\dfrac{f(9)}{f(8)}=\dfrac{-2\times(5-9)\times e^{(-4)^2}}{-2\times(5-8)\times e^{(-3)^2}}=\dfrac{4}{3}e^7$

6. 13

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여

$f'(x)=\dfrac{\ln x+k}{x}$ 이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int\left(\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{k}{x}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+k\ln x+C$ (C는 적분상수)

조건 (나)에서 $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=0$, $f(1)=0$이므로

$k=1$, $C=0$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x$

이때 $t>-\dfrac{1}{2}$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 두 점의 x좌표 중 작은 값이 $g(t)$이므로

$\dfrac{1}{2}\{\ln g(t)\}^2+\ln g(t)=t$

양변에 2를 곱한 후 정리하면

$\{\ln g(t)+1\}^2=2t+1$, $\ln g(t)+1=\pm\sqrt{2t+1}$

$\therefore\ g(t)=e^{-1-\sqrt{2t+1}}$

따라서 곡선 $y=g(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=\dfrac{3}{2}$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^{\frac{3}{2}}g(x)dx=\int_0^{\frac{3}{2}}e^{-1-\sqrt{2x+1}}dx$

$\sqrt{2x+1}=p$로 놓으면

$\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}=\dfrac{dp}{dx}$

$\therefore\ \dfrac{1}{p}=\dfrac{dp}{dx}$

$x=0$일 때 $p=1$, $x=\dfrac{3}{2}$일 때 $p=2$이므로

$S=\int_0^{\frac{3}{2}}e^{-1-\sqrt{2x+1}}dx$

$=\int_1^2 pe^{-1-p}dp$

$=\Big[-pe^{-1-p}-e^{-1-p}\Big]_1^2$

$=-3e^{-3}+2e^{-2}$

$=\dfrac{2e-3}{e^3}$

$a=2$, $b=-3$이므로

$a^2+b^2=13$

7. 26

[출제의도] 여러 가지 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 정적분의 값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+6}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{ae^{2x}+be^x+c+6}{e^x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\left(ae^x+b+\dfrac{c+6}{e^x}\right)=1$

따라서, $b=1$, $c=-6$이므로

$f(x)=ae^{2x}+e^x-6$

조건 (나)에서

$f(\ln 2)=ae^{2\ln 2}+e^{\ln 2}-6=4a+2-6=0$

$a=1$

즉, $f(x)=e^{2x}+e^x-6$

따라서,

$f(\ln 4)=e^{2\ln 4}+e^{\ln 4}-6=16+4-6=14$

이므로

$g(0)=\ln 2$, $g(14)=\ln 4$

따라서, $\int_0^{14}g(x)dx$에서 $g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)=\dfrac{dt}{dx}$이고

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}=\dfrac{1}{f'(t)}$

이므로

$\int_0^{14}g(x)dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}tf'(t)dt=\Big[tf(t)\Big]_{\ln 2}^{\ln 4}-\int_{\ln 2}^{\ln 4}f(t)dt$

$=14\ln 4-\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left(e^{2t}+e^t-6\right)dt=14\ln 4-\left[\dfrac{1}{2}e^{2t}+e^t-6t\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$

$=28\ln 2-(8-6\ln 2)=34\ln 2-8$

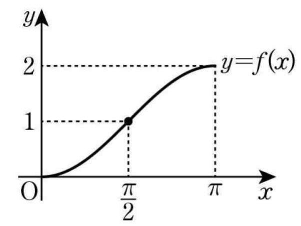
따라서 $p=-8$, $q=24$이므로

$p+q=26$

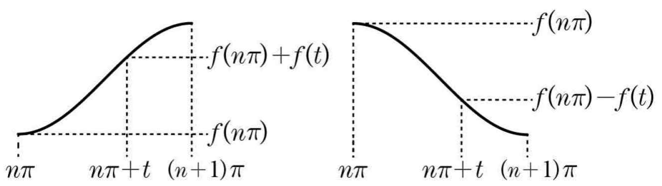
8. ②

[출제의도] 곡선의 오목과 볼록을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 아래로 볼록이고, 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$에서 위로 볼록이므로 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

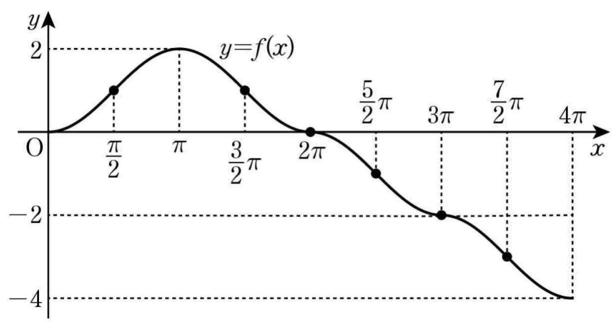


조건 (나)에 의하여 $n\pi < x \leq (n+1)\pi$에서 곡선의 모양은 다음 두 가지 중 하나이다.



$0 < x < 4\pi$에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수가 6인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 함수 $y=f(x)$가 $x=\pi$에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

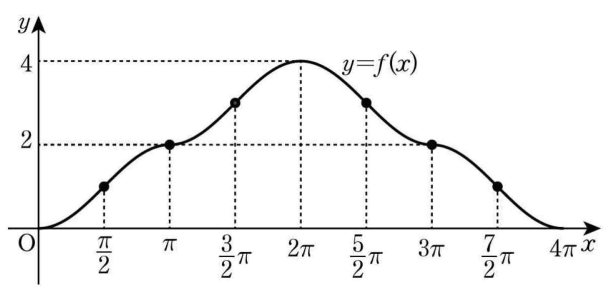
x 좌표가 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi}|f(x)|dx=4\int_0^{\pi}f(x)dx+\pi\times 2$$

$$=4\int_0^{\pi}(1-\cos x)dx+2\pi$$

$$=\Big[x-\sin x\Big]_0^{\pi}+2\pi=6\pi$$

(ⅱ) 함수 $y=f(x)$가 $x=2\pi$에서 극대일 때

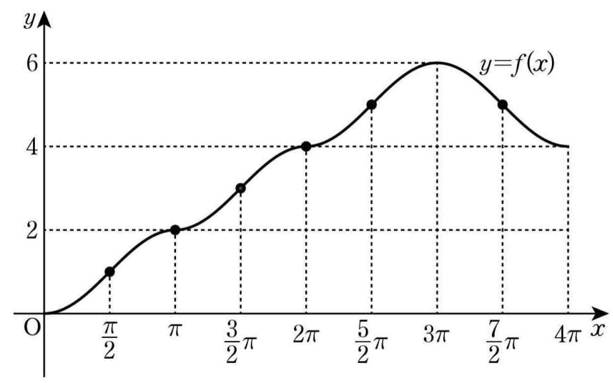


위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

x 좌표가 $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi}|f(x)|dx=4\int_0^{\pi}f(x)dx+2\pi\times 2=8\pi$$

(ⅲ) 함수 $y=f(x)$가 $x=3\pi$에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

x 좌표가 $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi}|f(x)|dx=4\int_0^{\pi}f(x)dx+2\pi\times 5=14\pi$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 최솟값은 6π이다.

9. 283

$x>0$일 때, $g(x)\geq 0$이므로 $x=-3$일 때

$g(x+3)\geq 0$이다.

따라서 조건 (나)에서 $x>-3$일 때 $f'(x)\geq 0$이다.

또, 조건 (가)에서 $f(x)\geq f(-3)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극소이면서 최소이다.

조건 (나)에 $x=0$을 대입하면 $f'(0)=0$이므로

$f'(x)=4x^2(x+3)=4x^3+12x^2$

$f(x)=x^4+4x^3+C$ (단, C는 적분상수)

$$\therefore \int_4^5 g(x)dx=\int_1^2 g(x+3)dx=\int_1^2\frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx$$

$f(x)-f(0)=t$ 로 치환하면

$f(1)-f(0)=5$, $f(2)-f(0)=48$

$f'(x)dx=dt$ 이므로

$$\int_1^2\frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx=\int_5^{48}\frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_5^{48}$$

$$=-\frac{1}{48}+\frac{1}{5}=\frac{48-5}{240}=\frac{43}{240}$$

$\therefore p+q=240+43=283$

10. ①

[출제의도] 부분적분법 이해하기

$$\int_{-1}^5 f(x)(x+\cos 2\pi x)dx$$

$$=\int_{-1}^5 xf(x)dx+\int_{-1}^5 f(x)\cos 2\pi x\,dx \quad \cdots \text{㉠}$$

조건 (가)에 의하여

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx=0,\ \int_{-1}^1 f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx$$

$$\int_{-1}^5 xf(x)dx$$

$$=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_1^3 xf(x)dx+\int_3^5 xf(x)dx$$

$$=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_{-1}^1(x+2)f(x+2)dx+\int_{-1}^1(x+4)f(x+4)dx$$

$$=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_{-1}^1(x+2)f(x)dx+\int_{-1}^1(x+4)f(x)dx$$

$$= 3\int_{-1}^{1} xf(x)dx + 6\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$= 12\int_{0}^{1} f(x)dx = 24 \ \cdots \ ㉡$$

조건 (가), (나)에 의하여 모든 실수 x 에 대하여

$f(-x)\cos 2\pi(-x) = f(x)\cos 2\pi x$

$f(x+2)\cos 2\pi(x+2) = f(x)\cos 2\pi x$

$$\int_{-1}^{5} f(x)\cos 2\pi x\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\, dx + \int_{1}^{3} f(x)\cos 2\pi x\, dx + \int_{3}^{5} f(x)\cos 2\pi x\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\, dx + \int_{-1}^{1} f(x+2)\cos 2\pi(x+2)\, dx$$

$$+ \int_{-1}^{1} f(x+4)\cos 2\pi(x+4)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\, dx + \int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\, dx$$

$$+ \int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\, dx$$

$$= 3\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\, dx$$

$$= 6\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x\, dx$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x\, dx = \frac{1}{6}\left(\frac{47}{2} - 24\right) = -\frac{1}{12}$$

따라서

$$\int_{0}^{1} f'(x)\sin 2\pi x\, dx = \Big[f(x)\sin 2\pi x\Big]_{0}^{1} - 2\pi\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x\, dx$$

$$= -2\pi\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x\, dx = \frac{\pi}{6}$$

11. 143

[출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서 $f(1) = 1$ 이므로, 조건 (나)에 의하여

$g(2) = 2f(1) = 2$

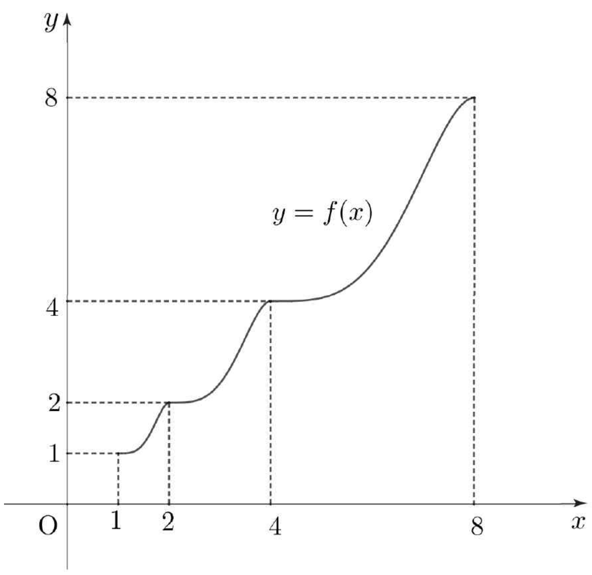
따라서, $f(2) = 2$ 이므로,

$g(4) = 2f(2) = 4$

따라서, $f(4) = 4$ 이므로,

$g(8) = 2f(4) = 8$

따라서, $f(8) = 8$ 이다.



부분적분법에 의하여

$$\int_{1}^{8} xf'(x)dx = \Big[\ xf(x)\Big]_{1}^{8} - \int_{1}^{8} f(x)dx$$

$$= 8f(8) - f(1) - \int_{1}^{8} f(x)dx$$

$$= 8\times 8 - 1 - \int_{1}^{8} f(x)dx$$

$$= 63 - \int_{1}^{8} f(x)dx \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

이 때,

$$\int_{1}^{8} f(x)dx$$

$$= \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{8} f(x)dx \qquad \cdots\cdots \ ㉡$$

이고, $\int_{1}^{2} f(x)dx = \frac{5}{4}$ …… ㉢

이다. 이 때, 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프의 대칭성에 대하여

$$\int_{2}^{4} f(x)dx = 4\times 4 - 2\times 2 - \int_{2}^{4} g(y)dy$$

$$= 12 - \int_{2}^{4} g(y)dy \qquad \cdots\cdots \ ㉣$$

이 때, $y = 2t$ 로 놓으면 치환적분법에 의하여

$\int_{2}^{4} g(y)dy = 2\int_{1}^{2} g(2t)dt$ 이므로,

조건 (나)에서

$$\int_{2}^{4} g(y)dy = 2\int_{1}^{2} g(2t)dt$$

$$= 2\int_{1}^{2} 2f(t)dt$$

$$= 4\int_{1}^{2} f(x)dx$$

$$= 4\times\frac{5}{4}$$

$$= 5$$

㉣에서

$$\int_{2}^{4} f(x)dx = 12 - \int_{2}^{4} g(y)dy$$

$= 12 - 5$

$= 7$ …… ㉤

또, 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\int_{4}^{8} f(x)dx = 8\times 8 - 4\times 4 - \int_{4_8} g(y)dy$$

$$= 48 - \int_{4}^{8} g(y)dy \qquad \cdots\cdots \ ㉥$$

이 때, $y = 2t$ 로 놓으면 치환적분법에 의하여

$\int_{4}^{8} g(y)dy = 2\int_{2}^{4} g(2t)dt$ 이므로,

조건 (나)에서

$$\int_{4_8} g(y)dy = 2\int_{2}^{4} g(2t)dt$$

$$= 2\int_{2}^{4} 2f(t)dt$$

$$= 4\int_{2}^{4} f(x)dx$$

$=4\times 7$

$=28$

ⓑ에서

$\int_4^8 f(x)\,dx = 48-\int_4^8 g(y)\,dy$

$=48-28$

$=20$ …… ⓢ

ⓛ, ⓒ, ⓓ, ⓢ에서

$\int_1^8 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^4 f(x)\,dx+\int_4^8 f(x)\,dx$

$=\frac{5}{4}+7+20$

$=\frac{113}{4}$

이므로, ⓐ에서

$\int_1^8 xf'(x)\,dx = 63-\int_1^8 f(x)\,dx$

$=63-\frac{113}{4}$

$=\frac{139}{4}$

따라서 $p+q=4+139=143$

다른 풀이

$\int_1^8 xf'(x)\,dx$ 에서 $x=g(y)$라 하면

$x=1$일 때, $y=1$, $x=8$일 때, $y=8$이고,

$\frac{dx}{dy}=g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ 이므로,

$\int_1^8 xf'(x)\,dx = \int_1^8 g(y)\,dy$

$=\int_1^2 g(y)\,dy+\int_2^4 g(y)\,dy+\int_4^8 g(y)\,dy$

이 때,

$\int_1^2 g(y)dy = 2\times 2-1\times -\int_1^2 f(x)\,dx$

$=3-\frac{5}{4}$

$=\frac{7}{4}$

한 편, $\int_2^4 g(y)dy=\int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$ 에서

$\frac{y}{2}=t$ 라 하면 $y=2$일 때, $t=1$, $y=4$일 때, $t=2$이고,

$\frac{1}{2}=\frac{dt}{dy}$ 이므로,

$\int_2^4 g(y)dy=\int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$

$=\int_1^2 4f(t)\,dt$

$=4\int_1^2 f(t)\,dt$

$=4\times\frac{5}{4}$

$=5$

또, $\int_4^8 g(y)\,dy=\int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$ 에서

$\frac{y}{2}=t$ 라 하면 $y=4$일 때, $t=2$, $y=8$일 때, $t=4$이고,

$\frac{1}{2}=\frac{dt}{dy}$ 이므로,

$\int_4^8 g(y)\,dy=\int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$

$=\int_2^4 4f(t)\,dt$

$=4\int_2^4 f(t)\,dt$

$=4\times\left\{4\times 4-2\times 2-\int_2^4 g(y)dy\right\}$

$=4(12-5)$

$=28$

따라서 $\int_1^8 xf'(x)\,dx=\int_1^8 g(y)\,dy$

$=\int_1^2 g(y)\,dy+\int_2^4 g(y)\,dy+\int_4^8 g(y)\,dy$

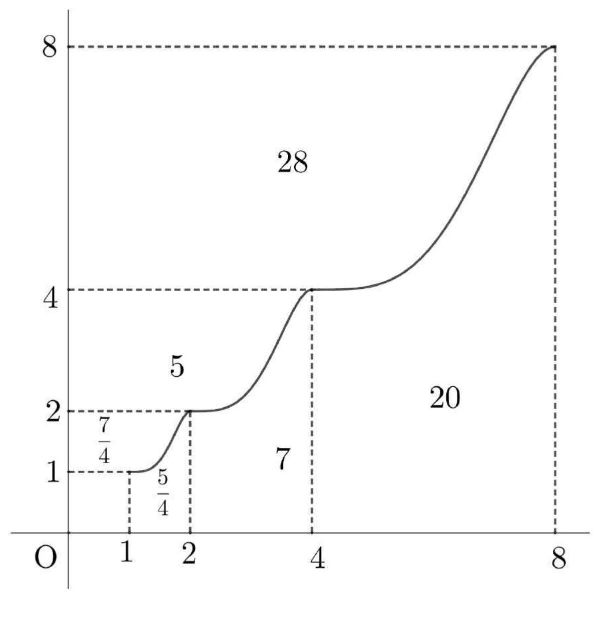
$=\frac{7}{4}+5+28$

$=\frac{139}{4}$

이므로, $p+q=4+139=143$

[참고]

조건 (나)의 성질 $g(2x)=2f(x)$에서 다음 그림과 같이 각 부분의 넓이가 대각선 방향으로 4배씩 증가함을 알 수 있다.



12. 115

[출제의도] 삼각함수의 극한 및 함수의 극값을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서 $x\to 0$일 때, (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로

(분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\sin(\pi\times f(x))=\sin(\pi\times f(0))=0$에서

$f(0)=n$(n은 정수)이다.

한편, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 9이므로

$f(x)=9x^3+ax^2+bx+n$ (a, b는 상수)

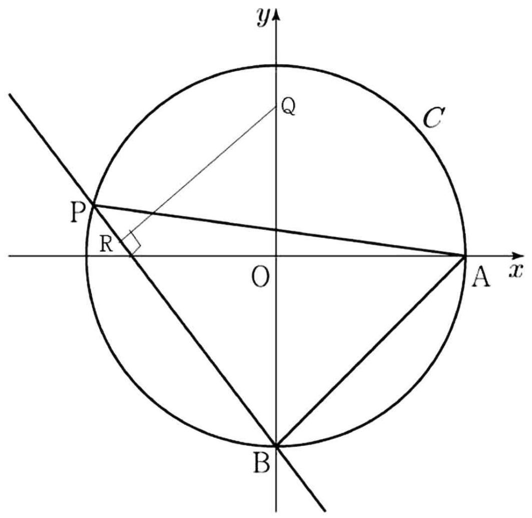
로 놓을 수 있다.

이 때, $h(x)=\sin(\pi\times f(x))$라 하면 $h(0)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)$이다. 즉,
$h'(0)=0$이다.
이 때, $h'(x)=\pi f'(x)\times\cos(\pi\times f(x))$이므로
$h'(0)=\pi\times f'(0)\times\cos(n\pi)=0$에서
$f'(0)=0$
$f'(x)=27x^2+2ax+b$에서
$f'(0)=b=0$ …… ㉠
한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1+}g(x)$이어야 한다.
이때, 함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이므로 $\lim_{x\to 1+}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)$이다.
$\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=9+a+n$,
$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=n$이므로
$9+a+n=n$
$a=-9$ …… ㉡
$f'(x)=27x^2-18x=9x(3x-2)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=0$에서 극대이고 $x=\frac{2}{3}$에서 극소이다.
조건 (나)에 의해 $f(0)\times f\left(\frac{2}{3}\right)=5$이므로
$n\times\left(n-\frac{4}{3}\right)=5$
$(3n+5)(n-3)=0$
n이 정수이므로 $n=3$ …… ㉢
㉠~㉢에 의해 $f(x)=9x^3-9x^2+3$
따라서

$$\int_0^5 xg(x)dx$$
$$=\int_0^1 xg(x)dx+\int_1^2 xg(x)dx+\int_2^3 xg(x)dx+\int_3^4 xg(x)dx+\int_4^5 xg(x)dx$$
$$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 (x+1)g(x+1)dx+\int_0^1 (x+2)g(x+2)dx$$
$$+\int_0^1 (x+3)g(x+3)dx+\int_0^1 (x+4)g(x+4)dx$$
$$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 (x+1)f(x+1)dx+\int_0^1 (x+2)f(x)dx$$
$$+\int_0^1 (x+3)f(x)dx+\int_0^1 (x+4)f(x)dx$$
$$=5\int_0^1 xf(x)dx+10\int_0^1 f(x)dx$$
$$=5\int_0^1\left(9x^4-9x^3+3x\right)dx+10\int_0^1\left(9x^3-9x^2+3\right)dx$$
$$=5\left[\frac{9}{5}x^5-\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+10\left[\frac{9}{4}x^4-3x^3+3x\right]_0^1$$
$$=\frac{21}{4}+\frac{45}{2}=\frac{111}{4}$$
따라서 $p=4$, $q=111$이므로 $p+q=4+111=115$이다.

13. ①
[출제의도] 삼각함수의 적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?



$\overline{QB}=2+2\cos\theta=2(1+\cos\theta)$이고 직각삼각형 QRB에서
$\angle$ QBR$=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로
$\overline{BR}=\overline{QB}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2(1+\cos\theta)\sin\theta$
삼각형 APB의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의해
$\frac{\overline{BP}}{\sin\theta}=2\times 2$이므로 $\overline{BP}=4\sin\theta$
따라서 $f(\theta)=\overline{BP}-\overline{BR}$
$=4\sin\theta-2(1+\cos\theta)\sin\theta$
$=2\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(2-2\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$
$$=\left[-2\cos\theta-\sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\left(-2\cos\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{3}\right)-\left(-2\cos\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\left(-1-\frac{3}{4}\right)-\left(-\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$

14. 답. ①
$e^t=y$로 놓으면
$t=0$일 때 $y=1$, $t=1$일 때 $y=e$이고,
$e^t=\frac{dy}{dt}$ 이므로

$$f(x)=\int_0^1\frac{1}{4+(x-1)e^t}dt$$
$$=\int_1^e\left\{\frac{1}{4+(x-1)y}\times\frac{1}{y}\right\}dy$$
$$=\int_1^e\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{y}-\frac{x-1}{4+(x-1)y}\right\}dy$$
$$=\frac{1}{4}\int_1^e\left\{\frac{1}{y}-\frac{x-1}{4+(x-1)y}\right\}dy$$
$$=\frac{1}{4}\Big[\ln|y|-\ln|4+(x-1)y|\Big]_1^e$$
$$=\frac{1}{4}\{1-\ln|4+(x-1)e|+\ln|x+3|\}$$

따라서

$$f'(x)=\frac{1}{4}\left\{-\frac{e}{4+(x-1)e}+\frac{1}{x+3}\right\}$$

이므로

$$f'(2)=\frac{1}{4}\left\{-\frac{e}{4+e}+\frac{1}{5}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{-4e+4}{5(e+4)}$$

$$=\frac{1-e}{5(e+4)}$$

15. 답. ②

조건 (가)에 의하여 $g(x)=-(x-a)(x-a-2)$

이때 $g(-1)=1$ 이므로 $-(-1-a)(-1-a-2)=1$

$(a+1)(a+3)=-1$

$a^2+4a+4=0$

$(a+2)^2=0$

따라서 $a=-2$ 이므로 $g(x)=-(x+2)x=-x^2-2x$

또한 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$ $(a<b)$ 에서만 만나므로 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$ 의 두 실근이 a, b 이다.

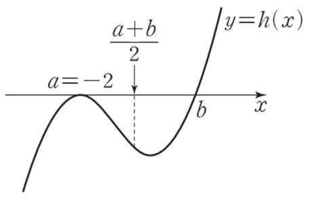
이때 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$h(x)=(x-a)^2(x-b)=(x+2)^2(x-b)$ …… ㉠

또는

$h(x)=(x-a)(x-b)^2=(x+2)(x-b)^2$ …… ㉡

㉠에서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.



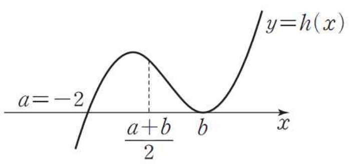
[그림 1]

이때

$$h\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

㉡에서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

이때

$$h\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$$

이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

즉, $h(x)=f(x)-g(x)=(x+2)(x-b)^2$ 이므로

$f(x)=(x+2)(x-b)^2+g(x)$

$=(x+2)(x-b)^2-x^2-2x$

$f'(x)=(x-b)^2+2(x+2)(x-b)-2x-2$

$f''(x)=2(x-b)+2(x-b)+2(x+2)-2$

$=6x-4b+2$

이므로

$f''(1)=6-4b+2=0$ 에서 $b=2$

따라서

$f(x)=(x+2)(x-2)^2-x(x+2)$

$=(x+2)(x^2-5x+4)$

$=(x+2)(x-1)(x-4)$

이므로

$$\int_5^6\frac{\left(\frac{5}{x}-2\right)g(x)}{f(x)}dx=\int_5^6\frac{\left(\frac{5}{x}-2\right)\{-x(x+2)\}}{(x+2)(x-1)(x-4)}dx$$

$$=\int_5^6\frac{(2x-5)(x+2)}{(x+2)(x-1)(x-4)}dx$$

$$=\int_5^6\frac{2x-5}{(x-1)(x-4)}dx$$

$$=\int_5^6\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}\right)dx$$

$$=\Big[\ln|x-1|+\ln|x-4|\Big]_5^6$$

$$=\ln5+\ln2-\ln4=\ln\frac{5\times2}{4}$$

$$=\ln\frac{5}{2}$$

16. 답. ⑤

조건 (가)에 의하여 모든 실수 x 에 대하여

$f'(-x)\times(-x)'=f'(x)$

즉, $-f'(-x)=f'(x)$ 에서

$f'(-x)=-f'(x)$

이때 $g(x)=\dfrac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}$ 라 하면

$$g(-x)=\frac{-xf'(-x)}{1+\pi^{f'(-x)}}dx=\frac{xf'(x)}{1+\pi^{-f'(x)}}$$

$$=\frac{xf'(x)\times\pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}$$

이므로

$$g(x)+g(-x)=\frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}\times\frac{xf'(x)\times\pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}$$

$$=\frac{xf'(x)\{1+\pi^{f'(x)}\}}{1+\pi^{f'(x)}}=xf'(x)\ \cdots\cdots ㉠$$

또한 $h(x)=g(x)-g(-x)$ 라 하면

$h(-x)=g(-x)-g(x)=-h(x)$ 이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx=0$$

즉, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{g(x)-g(-x)\}dx=0$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}g(-x)dx$$

㉠에 의하여

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{g(x)-g(-x)\}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}xf'(x)dx$이므로

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$$

따라서

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$$

이때 $u(x) = x,\ v'(x) = f'(x)$ 로 놓으면

$u'(x) = 1,\ v(x) = f(x)$ 이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx = \Big[xf(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\times 12 - 12$$

$$= 6\pi - 12$$

다른풀이

조건 (가)에 의하여 모든 실수 x 에 대하여

$f'(-x)\times(-x)' = f'(x)$

즉, $-f'(-x) = f'(x)$ 에서

$f'(-x) = -f'(x)$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$ 에서 $-x = t$ 로 놓으면

$x = -\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ 일 때 $t = 0$ 이고,

$-1 = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-tf'(-t)}{1+\pi^{f'(-t)}}dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{tf'(t)}{1+\pi^{f'(t)}}dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{tf'(t)\times\pi^{f'(t)}}{1+\pi^{f'(t)}}dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)\times\pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$

이 식을 ㉠에 대입하면

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)\times\pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)\{1+\pi^{f'(x)}\}}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$$

$$= \Big[xf(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\times 12 - 12$$

$$= 6\pi - 12$$

17. **정답** 17

$G'(x) = g(x)$라 할 때,

$\int_{f(1)}^{f(x)} g(t)dt = G(f(x)) - G(f(1))$ 이므로

조건 (가)에서 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$G'(f(x))f'(x) = g(f(x))f'(x) = a + \frac{1}{x}$

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $g(f(x)) = x$

그러므로 $xf'(x) = a + \frac{1}{x}$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 $x > 0$이므로 ㉠의 양변을 x로 나누면

$f'(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}$

$f(4) - f(2) = \int_2^4 f'(x)dx$ 이고,

$$\int_2^4 f'(x)dx = \int_2^4\left(\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \left[a\ln x - \frac{1}{x}\right]_2^4$$

$$= \left(a\ln 4 - \frac{1}{4}\right) - \left(a\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= a\ln 2 + \frac{1}{4}$$

조건 (나)에 의하여

$a\ln 2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 3\ln 2$이므로 $a = 3$

한편, $f(x) = \int\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx = 3\ln x - \frac{1}{x} + C$ (단, C는 적분상수)

이므로 $f(1) = -1 + C = 2$에서 $C = 3$

즉, $f(x) = 3\ln x - \frac{1}{x} + 3$에서

$f(3) = 3\ln 3 - \frac{1}{3} + 3 = \frac{8+9\ln 3}{3}$

따라서 $p = 8,\ q = 9$이므로

$p + q = 8 + 9 = 17$

18. [정답] ⑤

19. [정답] 144

[해설]

$f'(x) = \ln\left(e^{|x|} - a\right)$

조건 (가)에 의하여

$f'\left(\ln\frac{3}{2}\right)=\ln\left(\frac{3}{2}-a\right)=0$이므로 $a=\frac{1}{2}$

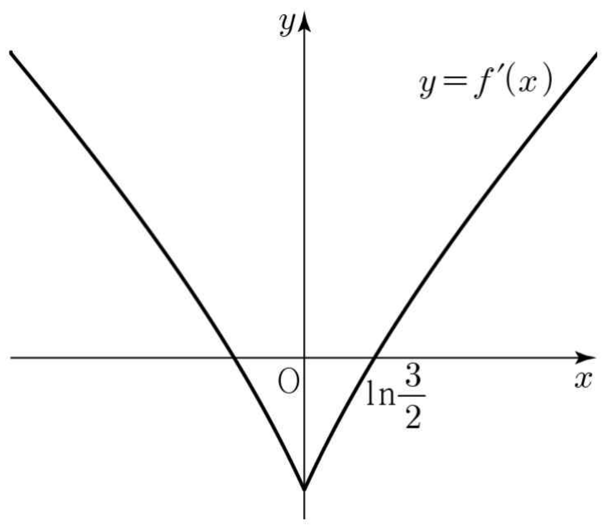
$f'(x)=\ln\left(e^{|x|}-\frac{1}{2}\right)$

모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고,

$f'(0)=\ln\frac{1}{2}<0$

$x>0$일 때, $f''(x)=\dfrac{e^x}{e^x-\frac{1}{2}}>0$

함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이므로 $f(x)=-f(-x)+C$(단, C는 적분상수)$f(0)=0$이므로 $C=0$

그러므로 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\ln\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$\ln\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 극솟값을 m $(m<0)$이라 하면,

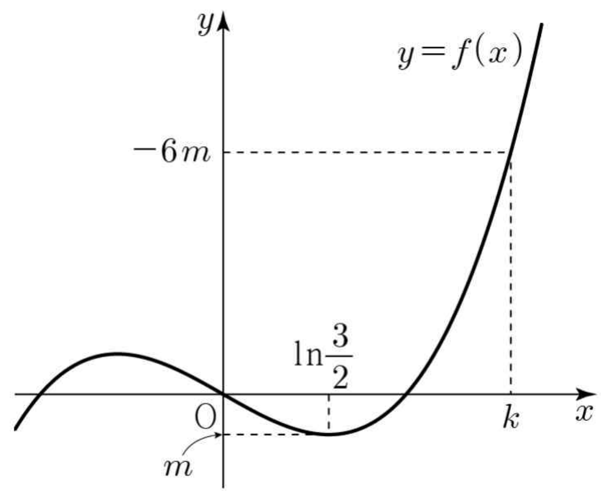
$f\left(\ln\frac{3}{2}\right)=m$

조건 (나)에 의하여

$f\left(-\ln\frac{3}{2}\right)=-f\left(\ln\frac{3}{2}\right)=-m$

$f(k)=-6m$ $\left(k>\ln\frac{3}{2}\right)$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx$$
$$=\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x)+f(k)}dx$$
$$=\int_0^{\ln\frac{3}{2}} \frac{-f'(x)}{f(x)+f(k)}dx+\int_{\ln\frac{3}{2}}^k \frac{f'(x)}{f(x)+f(k)}dx$$
$$=\int_0^{\ln\frac{3}{2}} \frac{-\{f(x)+f(k)\}'}{f(x)+f(k)}dx+\int_{\ln\frac{3}{2}}^k \frac{\{f(x)+f(k)\}'}{f(x)+f(k)}dx$$
$$=-\Big[ln\,|f(x)+f(k)|\Big]_0^{\ln\frac{3}{2}}+\Big[ln\,|f(x)+f(k)|\Big]_{\ln\frac{3}{2}}^k$$
$$=-\Big[ln\,\{f(x)+f(k)\}\Big]_0^{\ln\frac{3}{2}}+\Big[ln\,\{f(x)+f(k)\}\Big]_{\ln\frac{3}{2}}^k$$
$$=-\ln(m-6m)+\ln(0-6m)+\ln(-6m-6m)-\ln(m-6m)$$
$$=\ln\frac{-6m}{-5m}+\ln\frac{-12m}{-5m}=\ln\frac{6}{5}+\ln\frac{12}{5}=\ln\frac{72}{25}$$

이므로 $p=\ln\frac{72}{25}$

따라서 $100\times a\times e^p=100\times\frac{1}{2}\times\frac{72}{25}=144$

20\. 125

함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)=|\sin x|\cos x$ 에서

$$f'(x)=\begin{cases}\sin x\cos x & (\sin x\geq 0)\\ -\sin x\cos x & (\sin x<0)\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin 2x & (\sin x\geq 0)\\ -\frac{1}{2}\sin 2x & (\sin x<0)\end{cases}$$

이므로

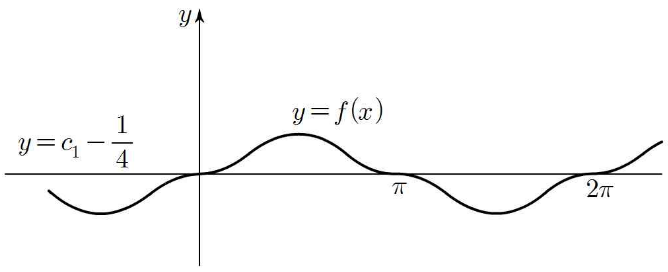
$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1 & (\sin x\geq 0)\\ \frac{1}{4}\cos 2x+C_2 & (\sin x<0)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=\pi$ 에서 연속이다.

$-\frac{1}{4}cos\,2\pi+C_1=\frac{1}{4}cos\,2\pi+C_2$, $\quad C_2=C_1-\frac{1}{2}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$h(x)=\int_{0}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$h'(x)=f(x)-g(x)$

함수 $h(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로 $h'(a)=0$에서

$f(a)=g(a)$ 이고 $x=a$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ $(a>0)$에서의 접선의 방정식이므로 $x=a$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌려면 점 $(a, f(a))$는 함수 $f(x)$의 변곡점이어야 한다.

$$f''(x)=\begin{cases}\cos 2x & (\sin x \geq 0)\\ -\cos 2x & (\sin x<0)\end{cases}$$

$\cos 2x=0$ 에서 함수 $f(x)$는

$$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \cdots$$

에서 변곡점을 갖는다.

또한, 자연수 n에 대하여

$$\lim_{x\to(2n-1)\pi+} f''(x)=-1,\quad \lim_{x\to(2n-1)\pi-} f''(x)=1$$

이고,

$$\lim_{x\to 2n\pi+} f''(x)=1,\quad \lim_{x\to 2n\pi-} f''(x)=-1$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=n\pi$에서 변곡점을 갖는다.

따라서 함수 $h(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하면

$$a_1=\frac{\pi}{4},\ a_2=\frac{3}{4}\pi,\ a_3=\pi,$$

$$a_4=\frac{5}{4}\pi,\ a_5=\frac{7}{4}\pi,\ a_6=2\pi,\ \cdots$$

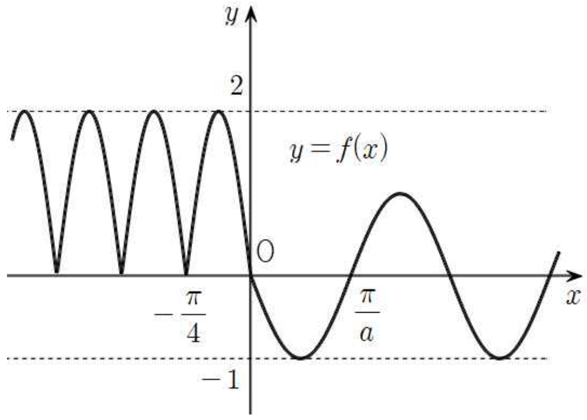
$$\therefore\ \frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)=\frac{100}{\pi}\left(2\pi-\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$=\frac{100}{\pi}\times\frac{5}{4}\pi$$

$$=125$$

21. ②

함수 $f(x)=\begin{cases}2|\sin 4x| & (x<0)\\ -\sin ax & (x\geq 0)\end{cases}$ 일 때 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt\right|$가 실수 전체에서 미분가능하므로

(i) $x<0$일 때

$x<-a\pi$인 경우

$$g(x)=-\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt,\ g'(x)=-f(x)$$

$-a\pi\leq x<0$인 경우

$$g(x)=\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt,\ g'(x)=f(x)$$

이므로

$$-f(-a\pi)=f(-a\pi),\qquad f(-a\pi)=0$$

$f(x)=2|\sin 4x|$에서 $f(-a\pi)=0$ 이므로

$$-a\pi=-\frac{k}{4}\pi\,(k\text{는 자연수}),\qquad a=\frac{k}{4}$$

(ii) $x\geq 0$일 때

(1) $\int_{-a\pi}^{\frac{\pi}{a}}f(t)dt<0$인 경우

$\int_{-a\pi}^{\alpha}f(t)dt=0$인 α에 대하여

$0\leq x<\alpha$에서 $g(x)=\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt,\ g'(x)=f(x)$이고

$\alpha\leq x\leq\frac{\pi}{a}$에서 $g(x)=\int_{-a\pi}^{\alpha}f(t)dt-\int_{\alpha}^{x}f(t)dt,$

$g'(x)=-f(x)$이므로

$$f(\alpha)=-f(\alpha),\qquad f(\alpha)=0$$

$f(\alpha)=0$ 은 $\int_{-a\pi}^{\frac{\pi}{a}}f(t)dt<0$에 모순이다.

(2) $\int_{-a\pi}^{\frac{\pi}{a}}f(t)dt\geq 0$인 경우

$\int_{-a\pi}^{0}f(t)dt\geq -\int_{0}^{\frac{\pi}{a}}f(t)dt$ 이므로

$$\int_{-a\pi}^{0}f(t)dt=\int_{-a\pi}^{0}2|\sin 4t|dt=k$$

$$-\int_{0}^{\frac{\pi}{a}}f(t)dt=-\int_{0}^{\frac{\pi}{a}}(-\sin at)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{a}cos\,at\right]_{0}^{\frac{\pi}{a}}$$

$$=\frac{2}{a}=\frac{8}{k}$$

$k\geq\frac{8}{k}$에서 자연수 k의 최솟값은 3이다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{k}{4}$ 이고 k의 최솟값이 3이므로 a의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다.

22. 12

[출제의도] 정적분의 성질과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

함수 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자.

조건 (가)에서

$$\int_{2a}^{3a+x}g(t)dt=\int_{3a-x}^{2a+2}g(t)dt$$

$G(3a+x)-G(2a)=G(2a+2)-G(3a-x)$
위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$g(3a+x)=g(3a-x)$ …… ㉠
모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하므로
함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3a$에 대하여 대칭이다.

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt=\int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt=\int_{3a-x}^{4a} g(t)dt+\int_{4a}^{2a+2} g(t)dt$$

$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt=\int_{3a-x}^{4a} g(t)dt$ 에서 $\int_{4a}^{2a+2} g(t)dt=0$
조건 (가)에서 $g(x)>0$이므로 $2a+2=4a$, $a=1$
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로
$h(x)=f(x)+f'(x)+1=x^2+px+q$ (p, q는 상수)라 하자.
함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로
$g(4)=g(2)$, 즉 $h(4)=h(2)$
$16+4p+q=4+2p+q$에서 $p=-6$
조건 (나)에서 $h(4)=5$이므로
$16-24+q=5$에서 $q=13$
$h(x)=x^2-6x+13$에서
$h'(x)=f'(x)+f''(x)=f'(x)+2$

$$\int_3^5 \{f'(x)+2a\}g(x)dx$$
$$=\int_3^5 \{f'(x)+2\}g(x)dx=\int_3^5 h'(x)\ln h(x)dx$$
$$=\Big[h(x)\ln h(x)\Big]_3^5-\int_3^5\left\{h(x)\times\frac{h'(x)}{h(x)}\right\}dx$$
$$=h(5)\ln h(5)-h(3)\ln h(3)-\{h(5)-h(3)\}$$
$$=8\ln 8-4\ln 4-(8-4)=-4+16\ln 2$$

따라서 $m=-4$, $n=16$이므로
$m+n=12$

23. 답. ③

$$2\pi\int_0^{2x}|t-x|\cos 2\pi t\,dt$$
$$=2\pi\int_0^{x}(x-t)\cos 2\pi t\,dt+2\pi\int_x^{2x}(t-x)\cos 2\pi t\,dt$$

이때 $u(t)=x-t$, $v'(t)=\cos 2\pi t$ 로 놓으면
$u'(t)=-1$, $v'(t)=\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t$ 이므로

$$\int_0^x (x-t)\cos 2\pi t\,dt$$
$$=\left[(x-t)\times\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\right]_0^x+\frac{1}{2\pi}\int_0^x \sin 2\pi t dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t\right]_0^x$$
$$=-\frac{1}{4\pi^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{4\pi^2}$$

즉, $2\pi\int_0^{x}(x-t)\cos 2\pi t\,dt=-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x+\frac{1}{2\pi}$

또한

$$\int_x^{2x}(t-x)\cos 2\pi t\,dt=-\int_x^{2x}(x-t)\cos 2\pi t\,dt$$

이므로

$$\int_x^{2x}(x-t)\cos 2\pi t\,dt$$
$$=\left[(x-t)\times\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\right]_x^{2x}+\frac{1}{2\pi}\int_x^{2x}\sin 2\pi t dt$$
$$=-\frac{x}{2\pi}\sin 4\pi x+\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t\right]_x^{2x}$$
$$=-\frac{x}{2\pi}\sin 4\pi x-\frac{1}{4\pi^2}\cos 4\pi x+\frac{1}{4\pi^2}\cos 2\pi x$$

즉,

$$2\pi\int_x^{2x}(t-x)\cos 2\pi t\,dt=-2\pi\int_x^{2x}(x-t)\cos 2\pi t\,dt$$
$$=x\sin 4\pi x+\frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x$$

이므로

$$2\pi\int_0^{2x}|t-x|\cos 2\pi t\,dt$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x+\frac{1}{2\pi}+x\sin 4\pi x$$
$$+\frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x$$
$$=-\frac{1}{\pi}\cos 2\pi x+\frac{1}{2\pi}+x\sin 4\pi x+\frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x$$

따라서 주어진 방정식은

$$-\frac{1}{\pi}\cos 2\pi x+\frac{1}{2\pi}+x\sin 4\pi x+\frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x=x\sin 4\pi x$$
$$-\frac{1}{\pi}\cos 2\pi x+\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x=0$$
$$-\cos 2\pi x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\pi x=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$$\cos 4\pi x=\cos^2 2\pi x-\sin^2 2\pi x$$
$$=\cos^2 2\pi x-(1-\cos^2 2\pi x)$$
$$=2\cos^2 2\pi x-1$$

이므로 ㉠에 대입하면

$$-\cos 2\pi x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2\cos^2 2\pi x-1)=0$$

$\cos 2\pi x(\cos 2\pi x-1)=0$
$\cos 2\pi x=0$ 또는 $\cos 2\pi x=1$
$0\le x\le 1$ 이므로 방정식의 서로 다른 실근은
$x=0$ 또는 $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$ 또는 $x=1$
이고, 서로 다른 실근의 개수는 4 이다.

24. 답. ②

$$g(x)=x^2+\int_0^1 (x+t)g(t)dt$$
$$=x^2+x\int_0^1 g(t)dt+\int_0^1 t\,g(t)dt$$

에서 $\int_0^1 g(t)dt=a$, $\int_0^1 t\,g(t)dt=b$ 라 하면
$g(x)=x^2+ax+b$ 이므로

$\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 (t^2+at+b)dt$

$= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + bt\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b = a$

에서 $3a - 6b = 2$ ⋯⋯ ㉠

$\int_0^1 t\,g(t)dt = \int_0^1 t(t^2+at+b)dt$

$= \int_0^1 (t^3 + at^2 + bt)dt$

$= \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}t^2\right]_0^1$

$= \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = b$

에서 $4a - 6b = -3$ ‘⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5,\ b = -\frac{17}{6}$

이므로 $g(x) = x^2 - 5x - \frac{17}{6}$

또한 $h(x) = \int_0^{g(x)} e^{f(t)}dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$h'(x) = e^{f(g(x))} \times g'(x)$

이고 $e^{f(g(x))} > 0$ 이므로 $h'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은 $g'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값과 일치한다.

이때 $g'(x) = 2x - 5$ 이므로

$g'(x) = 0$ 에서 $x = \frac{5}{2}$

즉, 함수 $h(x)$ 는 $x = \frac{5}{2}$ 에서 극솟값을 가지므로 $k = \frac{5}{2}$ 이다.

따라서 $g(2k) = g(5) = 5^2 - 5^2 - \frac{17}{6} = -\frac{17}{6}$

참고

$h(x) = \int_0^{g(x)} e^{f(t)}dt$ 에서

$\int e^{f(t)}dt = F(t) + C$ (C는 적분상수)라 하면

$h(x) = \int_0^{g(x)} e^{f(t)}dt = \left[F(t)\right]_0^{g(x)} = F(g(x)) - F(0)$

따라서 $h'(x) = F'(g(x)) \times g'(x) = e^{f(g(x))} \times g'(x)$

25. 정답 ②

$f(x)=x^2e^{-x} + \int_0^x e^{t-x}f(t)dt$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=0$

$f(x)=x^2e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} - e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt + e^{-x}e^x f(x)$

$= 2xe^{-x} - \left(x^2e^{-x} + \int_0^x e^{t-x}f(t)dt\right) + f(x)$

$= 2xe^{-x} - f(x) + f(x)$

$= 2xe^{-x}$

$f(x) = \int f'(x)dx$

$= \int 2xe^{-x}dx$

$= -2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx$

$= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=-2+C=0$에

$C=2$

$f(x)=-2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2$

한편, $f'(x)=0$에서 $x=0$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소인 동시에 최소이다.

$f(-2)=4e^2-2e^2+2=2e^2+2$

$f(2)=-4e^{-2}-2e^{-2}+2=-6e^{-2}+2$

즉, $f(-2)>f(2)>0$이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-2)=2e^2+2$, 최솟값은 $f(0)=0$이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $2e^2+2$이다.

[참고]

$f(x)=x^2e^{-x} + \int_0^x e^t f(t)dt$의 양변에 e^x을 곱하면

$e^x f(x)=x^2 + \int_0^x e^t f(t)dt$

양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x f(x) + e^x f'(x) = 2x + e^x f(x)$

즉, $e^x f'(x) = 2x$에서

$f'(x)=2xe^{-x}$

26. 정답 ①

$\int_0^x (x-t)f(t)dt = e^x + 8e^{-x} - 3x^2 + ax + b$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=1+8+b$

$b=-9$

㉠에서

$x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = e^x + 8e^{-x} - 3x^2 + ax - 9$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = e^x - 8e^{-x} - 6x + a$

$\int_0^x f(t)dt = e^x - 8e^{-x} - 6x + a$ ⋯⋯ ㉡

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=1-8+a$

$a=7$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x + 8e^{-x} - 6 = e^{-x}(e^{2x}+8-6e^x)$

$= e^{-x}(e^x-2)(e^x-4)$

곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표는

$f(x)=0$에서 $x=\ln 2$ 또는 $x=\ln 4$

$\ln 2 < x < \ln 4$에서 $f(x)<0$이므로

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left|e^x+8e^{-x}-6\right|dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left(-e^x-8e^{-x}+6\right)dx$$

$$=\Big[-e^x+8e^{-x}+6x\Big]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$=\left(-e^{\ln 4}+8e^{-\ln 4}+6\ln 4\right)-\left(-e^{\ln 2}+8e^{-\ln 2}+6\ln 2\right)$$

$$=(-4+2+12\ln 2)-(-2+4+6\ln 2)$$

$$=6\ln 2-4$$

따라서

$a+b+S=7+(-9)+(6\ln 2-4)=6\ln 2-6$

27. **정답** 4

$$f(x)\cos x=x\cos^2 x-\sin x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt-\int_0^x f(t)\sin t\,dt \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)\cos x-f(x)\sin x$

$$=\cos^2 x-2x\sin x\cos x-\cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt-f(x)\sin x$$

$$f'(x)\cos x=\cos^2 x-2x\sin x\cos x-\cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

모든 실수 x에 대하여 ㉡이 성립하므로

$$f'(x)=\cos x-2x\sin x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt=k$ (k는 상수)라 하면

$f'(x)=\cos x-2x\sin x-k$이므로

$$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-2t\sin t-k)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-k)\,dt-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

이때

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-k)\,dt=\Big[\sin t-kt\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{2}k$$

이고, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt$에서

$u(t)=t$, $v'(t)=\sin t$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=-\cos t$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt=\Big[-t\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$$

$$=0+\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1$$

그러므로 ㉢에서

$$k=\left(1-\frac{\pi}{2}k\right)-2\times 1$$

$$\left(1+\frac{\pi}{2}\right)k=-1$$

$$k=-\frac{2}{\pi+2}$$

㉠의 양변에 $x=\dfrac{\pi}{2}$를 대입하면

$$0=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt=-k=\frac{2}{\pi+2}$$

즉, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx=\frac{2}{\pi+2}$

이때 $u(x)=f(x)$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=f'(x)$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx=\Big[-f(x)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\cos x\,dx$$

$$=f(0)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\cos x\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi+2}$$

$f(0)=0$이므로 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\cos x\,dx=\frac{2}{\pi+2}$

따라서

$$(\pi+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)\sin x+f'(x)\cos x\}\,dx$$

$$=(\pi+2)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\cos x\,dx\right\}$$

$$=(\pi+2)\left(\frac{2}{\pi+2}+\frac{2}{\pi+2}\right)$$

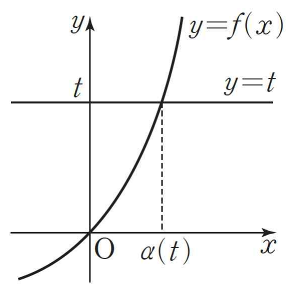
$$=4$$

28. **정답** 45

$f(x)=e^{2x}+2e^x-3$에서

$f'(x)=2e^{2x}+2e^x=2e^x(e^x+1)>0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표를 $\alpha(t)$라 하면 함수

$g(x)=\displaystyle\int_0^x\{t-f(s)\}\,ds$는 $x=\alpha(t)$에서

극대인 동시에 최대이므로 $h(t)=\alpha(t)$이다.

즉, $f(h(t))=t$이므로 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(h(t))h'(t)=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$h'(k)=\dfrac{1}{12}$이므로 ㉠에 $t=k$를 대입하면

$f'(h(k))h'(k)=1$에서

$$f'(h(k))=\frac{1}{h'(k)}=12$$

즉, $2e^{2h(k)}+2e^{h(k)}=12$에서

$e^{2h(k)}+e^{h(k)}-6=0$

$\{e^{h(k)}+3\}\{e^{h(k)}-2\}=0$

$e^{h(k)}+3>0$이므로

$e^{h(k)}-2=0$, $h(k)=\ln 2$

$f(h(k))=k$에서

$k=f(\ln 2)=4+2\times 2-3=5$

그러므로 $g(h(k))=g(\ln 2)=\int_0^{\ln 2}\{t-f(s)\}dx$

$0<t\leq 5$에서 $g(\ln 2)$의 최댓값은 $t=5$일 때이므로 최댓값은

$$\int_0^{\ln 2}\{5-(e^{2s}+2e^s-3)\}ds=\int_0^{\ln 2}(-e^{2s}-2e^s+8)ds$$
$$=\left[-\frac{1}{2}e^{2s}-2e^s+8s\right]_0^{\ln 2}$$
$$=-\frac{7}{2}+8\ln 2$$

따라서 $p=-\frac{7}{2}$, $q=8$이므로

$10(p+q)=10\left(-\frac{7}{2}+8\right)=10\times\frac{9}{2}=45$

29. ①

곡선 $y=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)$에서

$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}(-e^x-e^{-x}+2) & (-\ln 4\leq x<0)\\ 0 & (0\leq x\leq 1)\end{cases}$$

(ⅰ) $-\ln 4\leq x<0$일 때

$y'=\frac{1}{2}(-e^x+e^{-x})$이므로 곡선의 길이는

$$\int_{-\ln 4}^0\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{-\ln 4}^0\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})}\,dx$$
$$=\int_{-\ln 4}^0\sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})}\,dx$$
$$=\int_{-\ln 4}^0\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_{-\ln 4}^0$$
$$=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{15}{8}$$

(ⅱ) $0\leq x\leq 1$일 때

$y'=0$이므로 곡선의 길이는

$$\int_0^1\sqrt{1+0}\,dx=\left[t\right]_0^1=1$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=-\ln 4$에서 $x=1$까지 곡선

$y=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)$의 길이는

$$\int_{-\ln 4}^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\frac{15}{8}+1=\frac{23}{8}$$

30. ②

$\sin x=a\tan x \Rightarrow \cos x=a$ 또는 $x=0$

$\cos\theta=a$

$$f(a)=\int_0^\theta(\sin x-a\tan x)dx=\left[-\cos x+a\ln|\cos x|\right]_0^\theta$$
$$=1-\cos\theta+a\ln|\cos\theta|=1-a+a\ln a$$

$f'(a)=-1+\ln a+1=\ln a$

$f'(e^{-2})=-2$

31. ①

[출제의도] 평면 위의 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 두 점 x 좌표를 각각 α, β라 하면 두 점의 좌표는 (α, α^2), (β, β^2)이므로, 이 두 점의 중점의 좌표는 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ …… ㉠

이 다. 두 식 $y=x^2$, $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$를 연립하면

$x^2=t^2x-\frac{\ln t}{8}$, $x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$

이 방정식의 두 근이 α, β이므로, 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=t^2$, $\alpha\beta=\frac{\ln t}{8}$

따라서, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=t^4-\frac{\ln t}{4}$

이므로, ㉠에서 중점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}\right)$이다.

그러므로, 점 P의 시각 t에서의 위치는 $x=\frac{1}{2}t^2$,

$y=\frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}$이다.

이 때, $\frac{dx}{dt}=t$, $\frac{dy}{dt}=2t^3-\frac{1}{8t}$이므로,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}$$
$$=\sqrt{t^2+4t^6-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}}$$
$$=\sqrt{4t^6+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}}$$
$$=\sqrt{\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2}$$
$$=2t^3+\frac{1}{8t}$$

따라서, 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^e\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^e\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}e^4+\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2}-0\right)$$
$$=\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$$

32. 답. ①

$f(x)=nx(1-x^2)^n$에서

$f'(x)=n(1-x^2)^n+nx\times n(1-x^2)^{n-1}\times(-2x)$

$$= n(1-x^2)^{n-1}\{(1-x^2)-2nx^2\}$$
$$= n(1-x^2)^{n-1}\{1-(2n+1)x^2\}$$

$0 < x < 1$에서 $f'(x) = 0$을 만족시키는 x의 값에서 극대이면서 최대이므로

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

또한 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x) \geq 0$이므로

닫힌구간 $[0,\ a_n]$에서 곡선 $y = f(x)$와 직선 $x = a_n$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S_n = \int_0^{a_n} nx(1-x^2)^n\,dx$$

이때 $1-x^2 = y$로 놓으면

$x = 0$일 때 $y = 1$, $x = a_n$일 때 $y = 1-{a_n}^2$이고,

$-2x = \dfrac{dy}{dx}$이므로

$$S_n = \int_0^{a_n} nx(1-x^2)^n\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int_1^{1-a_n^2} ny^n\,dy$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{n}{n+1}y^{n+1}\right]_1^{1-a_n^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{n}{n+1}(1-a_n^2)^{n+1}-\frac{n}{n+1}\right\}$$
$$= \frac{n}{2n+2}\left\{1-\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{n+1}\right\}$$
$$= \frac{n}{2n+2}\left\{1-\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n+1}\right\}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2},$$

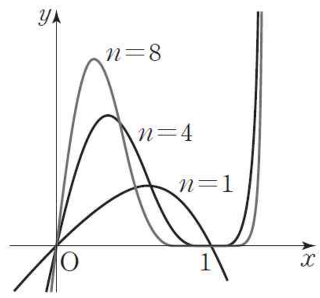
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^{n+1}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\times\frac{1}{2}}\times\left(1+\frac{1}{2n}\right)}$$
$$= \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{e}}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2n+2}\left\{1-\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n+1}\right\}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

참고

n의 값에 따른 곡선 $y = nx(1-x^2)^n$은 그림과 같다.



33. 답. ⑤

$f(x) = k(\ln x)^2$에서

$f'(x) = 2k\ln x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2k\ln x}{x}$이므로

곡선 $y = k(\ln x)^2$ 위의 점 $(a,\ k(\ln a)^2)$에서의 접선의 방정식은

$$y-k(\ln a)^2 = \frac{2k\ln a}{a}(x-a)$$
$$y = \frac{2k\ln a}{a}x-2k\ln a+k(\ln a)^2$$

이때 이 접선이 점 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}e\right)$를 지나므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2}e = -2k\ln a+k(\ln a)^2$$
$$k(\ln a)^2-2k\ln a-\frac{\sqrt{3}}{2}e = 0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한 조건 (가)에 의하여 ㉠의 $\ln a$에 대한 이차방정식의 두 근은 $\ln p$, $\ln q$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\ln p+\ln q = \frac{2k}{k} = 2,\ \ln pq = 2.\ pq = e^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$
$$\ln p\times\ln q = -\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{e}{k} \quad \cdots\cdots ㉢$$

또한 조건 (나)에 의하여

$$\frac{2k\ln p}{p}\times\frac{2k\ln q}{q} = \frac{4k^2\ln p\times\ln q}{pq} = -1$$
$$k = \frac{\sqrt{3}}{6}e$$

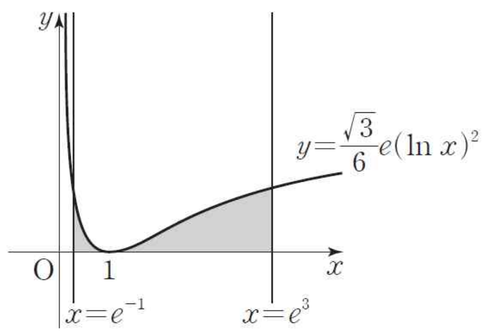
따라서 $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}e(\ln x)^2$이고 ㉠에서

$$\frac{\sqrt{3}}{6}e(\ln a)^2-\frac{\sqrt{3}}{3}e\ln a-\frac{\sqrt{3}}{2}e = 0$$
$$(\ln a)^2-2\ln a-3 = 0$$
$$(\ln a+1)(\ln a-3) = 0$$

$\ln a = -1$ 또는 $\ln a = 3$

즉, $a = e^{-1}$ 또는 $a = e^3$이고 $p < q$이므로

$p = e^{-1}$, $q = e^3$



이때 $f(x) \geq 0$이므로 곡선 $y = f(x)$와 두 직선 $x = e^{-1}$, $x = e^3$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S = \int_{e^{-1}}^{e^3}\frac{\sqrt{3}}{6}e(\ln x)^2\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{6}e\int_{e^1}^{e^3}(\ln x)^2\,dx$$

$\int_{e^{-1}}^{e^3}(\ln x)^2dx$에서
$u(x)=(\ln x)^2$, $v'(x)=1$로 놓으면
$u'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int_{e^{-1}}^{e^3}(\ln x)^2dx$$
$$=\left[x(\ln x)^2\right]_{e^{-1}}^{e^3}-\int_{e^{-1}}^{e^3}2\ln x\,dx$$
$$=9e^3-e^{-1}-2\left[x\ln x-x\right]_{e^{-1}}^{e^3}$$
$$=9e^3-\frac{1}{e}-2\{(3e^3-e^3)-(-e^{-1}-e^{-1})\}$$
$$=9e^3-\frac{1}{e}-2\left(2e^3+\frac{2}{e}\right)$$
$$=5e^3-\frac{5}{e}$$

따라서
$$S=\frac{\sqrt{3}}{6}e\int_{e^{-1}}^{e^3}(\ln x)^2dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}e\left(5e^3-\frac{5}{e}\right)$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{6}(e^4-1)$$

34. 답. ②

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\sec x>0$이므로 $f(x)>0$이고,

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서만 $g(x)>0$이므로 두 함수

$f(x)=a\sec x$, $g(x)=2\sin x\cos x$의 그래프가 만나는

점의 x좌표를 θ라 하면 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.

이때 $f(\theta)=g(\theta)$이므로
$a\sec\theta=2\sin\theta\cos\theta$
$a=2\sin\theta\cos^2\theta$ …… ㉠
또한
$f'(x)=a\sec x\tan x$, $g'(x)=2\cos^2x-2\sin^2x$
이고 $f'(\theta)=g'(\theta)$이므로
$a\sec\theta\tan\theta=2\cos^2\theta-2\sin^2\theta$
$2\sin\theta\cos^2\theta\times\sec\theta\tan\theta=2\cos^2\theta-2\sin^2\theta$
$2\sin^2\theta=2(1-\sin^2\theta)-2\sin^2\theta$
$\sin^2\theta=\frac{1}{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$이고

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이므로 ㉠에 대입하면

$a=2\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

한편, $f'(x)=0$에서 $\tan x=0$이므로 $x=0$이다.
$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=\frac{4\sqrt{3}}{9}$을 갖는다.

또한 $g'(x)=0$에서 $\cos^2x=\sin^2x$, 즉 $\tan x=\pm1$이므로

$x=-\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$이다.

$x=-\frac{\pi}{4}$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

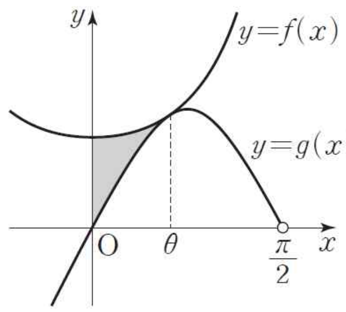
함수 $g(x)$는 $x=-\frac{\pi}{4}$에서 극솟값

$g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-1$을 갖고,

$x=\frac{\pi}{4}$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

함수 $g(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$을 갖는다.



따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^\theta\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\sec x-2\sin x\cos x\right)dx$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{9}\int_0^\theta\sec x\,dx-\int_0^\theta 2\sin x\cos x\,dx \quad\cdots\cdots ㉡$$

이때
$$\int_0^\theta\sec x\,dx$$
$$=\int_0^\theta\frac{1}{\cos x}dx$$
$$=\int_0^\theta\frac{\cos x}{\cos^2x}dx$$
$$=\int_0^\theta\frac{\cos x}{1-\sin^2x}dx$$
$$=\int_0^\theta\frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$$
$$=\int_0^\theta\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^\theta\left\{-\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}+\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}\right\}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\ln|1-\sin x|+\ln|1+\sin x|\right]_0^\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right]_0^\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}-\ln\frac{1+0}{1-0}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}-0$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$$

$$\int_0^\theta 2\sin x\cos x\,dx=\left[\sin^2x\right]_0^\theta=\sin^2\theta$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$$

이므로 ㉡에서

$$S=\frac{4\sqrt{3}}{9}\int_0^\theta \sec x\,dx-\int_0^\theta 2\sin x\cos x\,dx$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{9}\times\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{3}$$

김지형
대치예섭